

Generación y Caracterización de Vórtices Ópticos



David Muñetón Arboleda

Instituto de Física

Universidad de Antioquia

Tesis para optar al Título de Físico

Director: Ph. D. Edgar Rueda Muñoz

2012

A Ceci, a Sofi y a Jose...

Agradecimientos

No quiero exagerar con los agradecimientos sino que esta es la forma de reconocer a las personas que así sea en las cosas más mínimas, contribuyeron a que este hoy presentando la monografía de mi trabajo de grado para convertirme en Físico “de la elite colombiana”, como dijo el profesor Rodrigo Covaleta en su clase. Haré un recorrido por las personas que influyeron en toda la construcción de éste momento, no por su validez, sino por el orden histórico de su contribución. Quiero empezar agradeciéndole a Jose William por presentarme la física como un juego y no como un arreglo de ecuaciones que tanto atemoriza a las personas; a mi familia (Ceci, Johnny y mi papá) por respetar y apoyar la idea digamos, graciosa, de estudiar Física. A la Universidad de Antioquia (¡Viva la Universidad!) por abrir y recogerme en sus brazos, a ella llegaba un adolescente de 16 años y de ella sale un ser competitivo y preparado para muchas diversas situaciones de la vida.

A Néstor y Emilio por las primeras voluntades unidas en el instituto, a los de Biología Sebas ‘El charro’, Camilo y Kamil; a los de Química Steven, Paola y Gloria; y a los más que amigos de Matemáticas Diego y Cristian. Recuerdo y agradezco a los gladiadores de física con los que peleé contra grandes monstruos plasmados en un papel (parciales): Efrén, Milton, Paul y Sebastián. A Gina que fue el bastón que en momentos de confusión dio el apoyo para continuar. A Juan Camilo por enseñarme otros puntos de vista. A las muchachas del 9, Moni y Dore, por las sonrisas dibujadas. A aquellas amistades de astronomía; que en unos años diré que conocí al primer astrónomo que nació de la UdeA, Nicolás. A Juangui por las miles de historias, a Walter por la humildad incomparable. A mis amigos Sebastián ‘Puche’ y César ‘El coste’, que más que trasnoches estudiando se vivieron grandes anécdotas, dignas de recordarse para siempre. A Gerald por los momentos tan importantes y maravillosos vividos. A los compañeros de investigación por su compañía y respuesta a mis miles preguntas: Carlos y Juan. A los profesores que brindaron su apoyo incondicional en momentos de necesidad: Boris y Ernesto. Al profe John y al profe Hernando por darme tantas enseñanzas y empuje para lo que hago y haré en la vida. A Edgar por su guía y su paciencia, siempre recordaré aquella conversación que me asentó tantos pensamientos y me hizo tomar de las mejores decisiones de mi vida.

Temo por olvidar a alguien, pero a los incluidos y no incluidos les doy con el alma un abrazo y un MUCHAS GRACIAS!!

Ésta es la página en Blanco

Contenido

1

Agradecimientos.....	3
Contenido	5
Introducción	7
Descripción Teórica.....	9
Historia del Momento Angular de Espín y el Momento Angular Orbital de la Luz	9
Orígenes del Momento Angular Orbital de la Luz.....	12
Haz Laguerre-Gauss	14
Generación de Vórtices Ópticos.....	16
<i>Incidencia sobre una Máscara de Fase Espiral</i>	<i>16</i>
<i>Incidencia sobre un Holograma</i>	<i>17</i>
Propagación de la Luz emergente de una Máscara de Fase Espiral.....	20
<i>Para α entero</i>	<i>20</i>
<i>Cercanías al eje de Propagación</i>	<i>25</i>
<i>Para α fraccional.....</i>	<i>25</i>
Propagación de la Luz emergente de un Holograma tipo <i>Fork</i>	36
Generación y Caracterización	39
Generación de Vórtices Ópticos Computacionales.....	39
Generación de Vórtices Ópticos Experimentales.....	43
<i>Generación experimental usando la Máscara de Fase.....</i>	<i>44</i>
<i>Generación experimental usando el Holograma Fork</i>	<i>49</i>

<i>Generación experimental usando el Holograma Fork Impreso</i>	50
<i>Uso de pupilas para la generación de Vórtices Ópticos</i>	52
Caracterización de Vórtices Ópticos	60
<i>Método Denisenko para caracterizar vórtices ópticos</i>	60
<i>Método Prabhakar para caracterizar vórtices ópticos</i>	63
Ambigüedades de la Caracterización	68
<i>Ambigüedades en el patrón de intensidad</i>	69
<i>Ambigüedades en la fase</i>	75
<i>Ambigüedades tanto en la Intensidad como en la Fase</i>	77
Anexos	87
Caracterización del Modulador Espacial de Luz (SLM)	87
<i>Métodos para la Caracterización</i>	87
<i>Método Interferométrico</i>	87
<i>Método de Engström</i>	91
<i>Método del Par de Young</i>	93
<i>Método Común del Potenciómetro</i>	97
<i>Método de la Matriz de Jones</i>	98
<i>Método del Par de Young para Intensidad</i>	99
Estudio de la discretización en un SLM	99
<i>Resultados para los planos de Fourier</i>	107
Eficiencia de Difracción de un SLM	114
Bibliografía	117

Introducción

2

Todo ente o fenómeno en la naturaleza posee una descripción matemática que se compone de amplitud y fase, de las cuales los científicos se valen para construir modelos que interpreten y descubran los comportamientos observados en ella. Cuando aparece un vórtice en la naturaleza (Ejemplo: remolinos de aire o de agua) se explican a partir de indeterminaciones en la fase del ente físico estudiado y la desaparición de la amplitud del mismo en un punto. La luz no se exime de esta situación, con la propagación de una onda electromagnética que transporte una indeterminación en la fase, observada como una nulidad del campo, se dice que se tiene un vórtice óptico. En 1992 L. Allen introdujo un concepto revolucionario que explicaba la aparición y la propagación de este fenómeno en la luz. Allen dijo que los frentes de onda que contienen un vórtice óptico sobre su eje de propagación, se retuercen de forma helicoidal dando lugar al transporte de Momento Angular Orbital de la luz. A este fenómeno se le asocia el número l que está relacionado con la cantidad cuántica de Momento Angular Orbital de cada fotón. Con la aparición de este nuevo concepto, los estudios en el tema se dispararon convirtiéndose en uno de los fenómenos de frontera para investigar, puesto que, al estudiar el transporte de Momento Angular de Espín y Orbital se pueden desarrollar nuevas tecnologías que favorezcan unas ya conocidas: Encriptación, pinzas ópticas, motores diminutos, computación cuántica, telecomunicaciones, etc. Como los vórtices ópticos y así mismo el Momento Angular Orbital de la luz, se describe mediante el número cuántico l , conocido como la carga topológica, el estudio en este campo se centra en las propiedades obtenidas por estos frentes de onda helicoidales a partir de ésta. Para cargas topológicas enteras se producen frentes de onda helicoidales que presentan un número de aspas unidas en el eje de propagación, relacionado precisamente con la carga. Mientras que para cargas topológicas fraccionarias el punto de unión de las aspas, el vórtice óptico, se separa generando un conjunto de éstas, propagándose de forma individual en el espacio. Además que aparece una línea de oscuridad junto con el vórtice óptico, que en la actualidad está siendo estudiada su fenomenología y utilidad.

El objetivo del presente trabajo es producir la manera de detectar el valor de la carga topológica de vórtices ópticos. Al implementar los estados de Momento Angular

Orbital como marca para una información transmitida mediante luz, es necesario tener la capacidad de detectarla es decir, caracterizar con buena precisión el valor de la Carga topológica asociada al vórtice óptico para poder conseguir un transporte de información exitoso. Para conseguir el objetivo planteado se realizó un estudio teórico para vórtices ópticos y para la propagación de frentes de onda que transportan Momento Angular Orbital. En éste se discrimina la propagación del campo electromagnético para cargas topológicas enteras y fraccionarias (Capítulo 3). Se exponen las diferentes formas de generar vórtices ópticos presentando ventajas y desventajas de cada una. Se muestran resultados computacionales que se toman como teóricos y experimentales indicando las características de montaje para su creación. Luego se prueban diferentes métodos de caracterización de vórtices ópticos para así producir un modelo de detección del valor de las cargas topológicas (Capítulo 4). En la búsqueda de un método apropiado para la detección de las cargas topológicas se encontraron un conjunto de dificultades que introducen ambigüedades y errores aleatorios a la hora de producir una correcta caracterización de los mismos (Capítulo 5). Para la generación experimental de vórtices ópticos se utilizó un Modulador Espacial de Luz, dispositivo que debió ser caracterizado para un correcto funcionamiento. Los detalles de esta caracterización se muestran en el capítulo de Anexos.

Descripción Teórica 3

En 1992 L. Allen, afirmó que la luz además de transportar momento lineal y momento angular de espín transporta también momento angular orbital, MAO. En su artículo [1] Allen, asegura que un haz de luz que contiene una dependencia angular en la fase $\phi(r, \varphi) = \exp(il\varphi)$, transporta Momento Angular Orbital, este momento es distinto al momento de espín transportado por el fotón asociado a la polarización.

Historia del Momento Angular de Espín y el Momento Angular Orbital de la Luz [2]

Si bien Allen [1] describió la forma de producir haces que transporten Momento Angular Orbital, no fue el primero en distinguir la existencia de este fenómeno en la naturaleza de la Luz. El estudio de ambos momentos angulares data desde principios del siglo XX cuando Poynting anticipó que la luz con polarización circular tiene una razón entre el Momento Angular y la energía dada por $\sigma\hbar$. En 1909, propuso que cualquier cambio de la polarización, debe estar acompañado de un cambio del Momento Angular relacionado con el sistema óptico. En 1936 Beth demostró exitosamente la transferencia de energía en un sistema de luz polarizada y el movimiento rotacional de una lámina retardadora suspendida de un filamento.

Por su parte el Momento Angular Orbital, tubo aparición desde mediados del mismo siglo, al estudiar las transiciones dipolares y cuadrupolares en el nivel atómico, se requiere que haya emisión de fotones con momento angular igual a múltiplos enteros de \hbar , concluyendo entonces la existencia de la suma de momento angular orbital y de espín. Sin embargo esto siempre fue entendido como un fenómeno producido por la propagación del vector de Poynting fuera del eje de propagación, produciendo un resultado similar al ejercicio de empujar una puerta con un puntero láser. El punto clave que Allen *et al.* introdujo fue que este fenómeno es una propiedad natural de los haces de luz que presentan fases helicoidales, los cuales pueden ser generados en un laboratorio de Física estándar. Lo que hace que su descubrimiento sea aún más

notable es que la luz con fase helicoidal había sido objeto de estudio por varios años sin ningún tipo de reconocimiento o referencia del Momento Angular.

Antes de 1992, tal vez la principal fuente de interés es que los frentes helicoidales requieren una singularidad de fase a lo largo del centro del haz y, por tanto, al menos desde una perspectiva clásica, una línea de total oscuridad. Sin embargo, la línea de la singularidad no transporta energía, no tiene momentum lineal, y por lo tanto no hay momento angular en ella (además de que este punto está sobre el eje de propagación, así que $r = 0$). Por lo tanto, se destaca que el momento angular se debe a la luz que rodea la singularidad, no a la propia singularidad. Las líneas producidas por estas singularidades en la fase son estudiadas fuertemente desde principios de 1930, cuando Dirac planteó la necesidad de éstas, en la teoría cuántica de campos, para la existencia del monopolio magnético. Por otro lado, en la década de 1970, dichas singularidades se estudiaron en el electromagnetismo cuando Nye y Berry simulaban la propagación de los ecos de ondas de radio en la capa de hielo de la Antártida, mediante una ecografía dispersada sobre una superficie rugosa, de donde encontraron valores nulos para la intensidad y alrededor de los mismos, un cambio de fase igual a 2π . Sin duda el descubrimiento de estas singularidades en la fase dentro de los campos dispersos al azar, el que inspiró en el interés actual en las singularidades de fase y principalmente en los vórtices ópticos. De hecho, en 1979, Berry *et al.* reportaron el estudio de singularidades en la fase en la interferencia de múltiples haces de luz[3]. Aunque la luz que está alrededor de estas singularidades se considera que transporta Momento Angular Orbital, el momento angular sobre cualquier sección transversal del haz de luz, es aproximadamente cero. Posiblemente la primera generación de un haz con una sola línea de singularidad fue el producido por Vaughan y Willets en 1979, cuando examinaron el patrón de interferencia producido por la salida de un láser de iones de Kriptón de alta potencia y su imagen especular. Con este trabajo se encontró que combinando ordenes de modos Hermite-Gauss se pueden obtener haces de luz Helicoidales (Figura 1). Sin embargo, no se discutía como se da la propagación de estos modos y así mismo la estabilidad de los frentes de onda helicoidales.

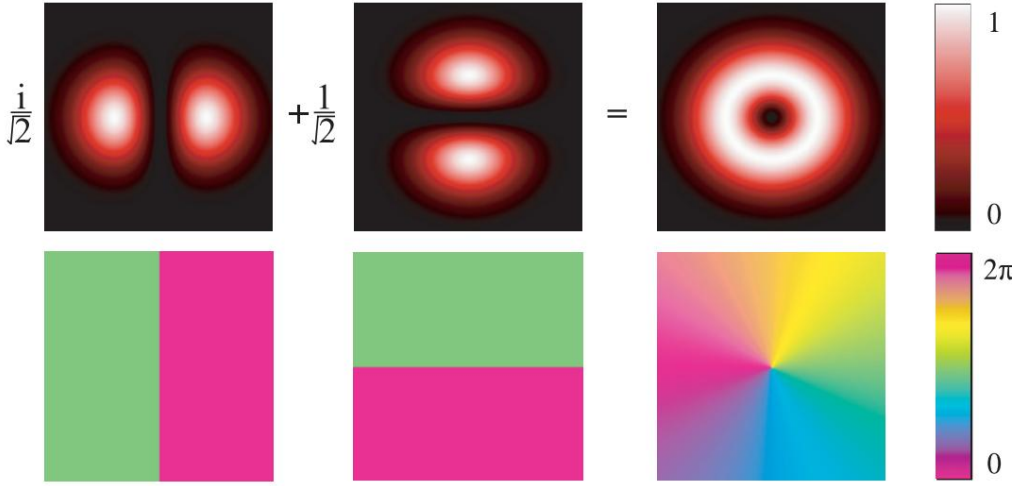


Figura 1. Combinación de modos Hermite-Gauss (HG_{01} y HG_{10}) para obtener un modo de Laguerre-Gauss (LG_{01}). Las imágenes superiores son las intensidades normalizadas y las inferiores son las fases de cada modo (Figura extraída de [2], Figure 3).

En 1988, Tamm introdujo un material absorbente intracavitario en un láser de Helio Neón, de tal manera que estimulara los modos Hermite-Gauss y bloqueara ciertas frecuencias para permitir la salida de un haz helicoidal, el sistema fue retomado en 1990 para darle estabilidad al modo Laguerre-Gauss. Un trabajo simultaneo fue realizado por Lugiato *et al.* los cuales encontraron que un rompimiento de la simetría cilíndrica en la salida de un haz de luz láser induce modos helicoidales de oscilación [4]. Este trabajo condujo a la identificación de “complejidad espacial” en láseres de modos multi-transversales donde los modos helicoidales juegan un papel crucial en la formación de las singularidades en la fase y en su dinámica. La importancia del estudio de los haces Laguerre-Gauss fue formalizado por D’Alessandro y Oppo en 1992. Por otro lado Couillet reconoció la similitud matemática entre la descripción de haces con frentes de onda helicoidales y los vórtices de superfluidos, debido a esto acuñó el término “Vórtice óptico”.

En 1990 se publicó una nueva forma de obtener frentes de onda helicoidales a la salida de un láser multimodal; Soskin *et al.* reportaron que con un simple elemento difractivo óptico que comprende una rejilla de difracción con una dislocación en forma de tenedor en el centro, puede convertir modos Gaussianos de cualquier láser en modos de fase helicoidal [5]. Este método basado en óptica difractiva es el utilizado actualmente en los laboratorios de óptica para la producción de vórtices ópticos.

Sin embargo, los vórtices ópticos no son una propiedad meramente de haces contruidos con dichas características, como se mencionó se ha detectado que la dispersión de ondas sonoras en superficies rugosas presentan la aparición de singularidades en la fase, las cuales cualitativamente no son diferentes a las obtenidas con haces de luz. Tal fenómeno tiene un desarrollo homogéneo en la luz, en la actualidad se sabe que cuando un haz de luz amplificado, pasa por una superficie rugosa aparece un patrón de Speckle, en el cual las manchas oscuras son de hecho, singularidades en la fase. Al propagar la aparición de estos vórtices en el espacio, construyen líneas de singularidad que a su vez hacen parte de complejas formas de fractales y variedades que están siendo estudiadas por los físicos matemáticos. A pesar de todos estos trabajos previos al desarrollado por *Allen et al*; ninguno de ellos reconoció que la generación y/o aparición de vórtices ópticos, trae consigo la característica de propagar momento angular, diferente a la propiedad cuántica del espín de la luz, asociada al tipo de polarización con la que la luz se propaga.

Orígenes del Momento Angular Orbital de la Luz [2]

A partir de la definición de momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, (donde \mathbf{L} es el momento angular, \mathbf{r} es el vector posición de la partícula o punto que trasporta momento, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento lineal (momento) y \times denota el producto vectorial) se tiene que para una onda plana en la cual el momento lineal \mathbf{p} está en la misma dirección que el vector de propagación \mathbf{k} , no puede haber ninguna componente del Momento Angular en la dirección de propagación. Partiendo de que hay frentes de onda que transportan MAO, Alison M. Yao dice [1] “Como el momento lineal de un campo electromagnético se puede expresar de la siguiente manera $\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, se sigue que, en un nivel mucho más fundamental, el momento angular en la dirección de propagación requiere que el campo eléctrico y/o el campo magnético contengan una componente no nula en la dirección z ” donde z es la dirección de propagación (NOTA: J. Simmons tiene un estudio similar pero para el momento angular de espín, cosa que es bastante interesante [6]). En las ondas planas se tiene que el campo electromagnético oscila en el plano perpendicular al eje de propagación, lo que se convierte en una paradoja, ya que inclusive las ondas planas con polarización circular no transportan entonces, momento angular. Sin embargo, las ondas planas son aproximaciones ideales que solo son discutidas en textos, ya que en la naturaleza no hay propagaciones de este estilo, donde los frentes de onda sean infinitos como se considera en el estudio teórico. Los haces planos en la naturaleza son limitados en extensión, ya sea por las propias condiciones de su generación o por el método y/o

dispositivo usado para su observación; esta limitación traducida en una abertura finita por la que se propaga da lugar a la aparición de una componente axial del campo electromagnético. Por otro lado, para el caso de polarización circular en la cual se tiene que el haz transporta momento angular asociado al espín de los fotones que viajan en él, la componente axial del campo electromagnético es una consecuencia inevitable del gradiente radial de la intensidad que se produce en el borde del haz (los fotones del haz más alejados del eje de propagación $r \rightarrow \max$). Realizando un tratamiento detallado para los estos efectos de borde en el haz, se encuentra que éste transporta una cantidad de momento angular de \hbar por fotón, sin importar la geometría utilizada [6].

El origen de haces con momento angular orbital se produce mediante fases iniciales dependientes del ángulo azimutal φ (ángulo formado en el plano trasversal al eje de propagación), como se mencionó anteriormente. Estos haces tienen frentes de onda con forma de Helicoides donde el número de hélices es la carga topológica l , que aparece en la fase (Figura 2). Se puede ver que el campo electromagnético transversal posee componente axial en estos frentes de onda. Equivalentemente el vector de Poynting que es perpendicular al campo electromagnético transversal, posee una componente azimutal alrededor del haz y por lo tanto se consigue la aparición del momento angular orbital alrededor del eje de propagación.

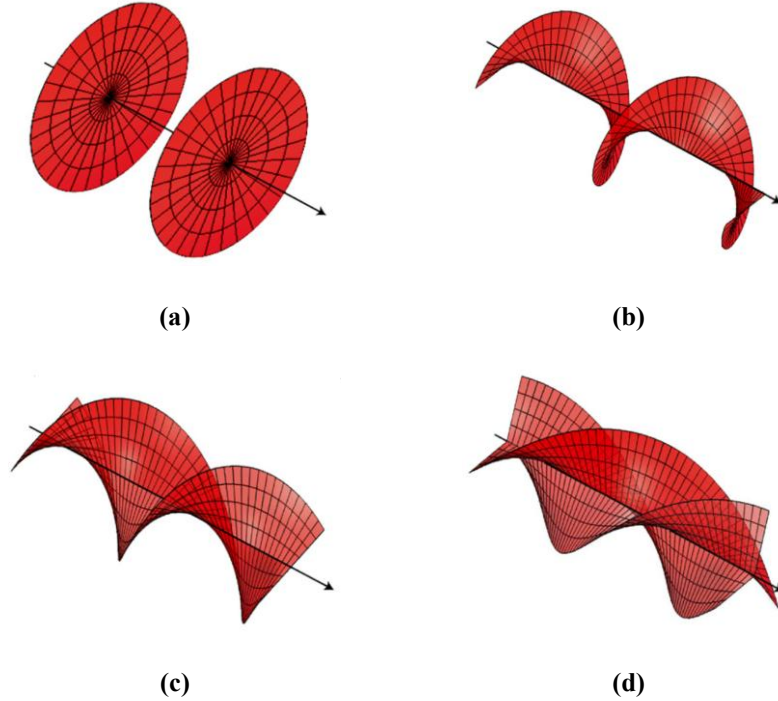


Figura 2. Frente de Onda helicoidal para una carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$ (Figura extraída de [2]).

El Momento Angular Orbital esta cuantizado, se dice que cada fotón transporta una cantidad de MAO $\hbar l$, de donde se concluye que la cantidad total de Momento Angular Orbital que transporta un haz de luz es $\hbar l N$, donde N es el número de fotones. Lo anterior se sigue a partir de argumentos geométricos: Sobre el punto con radio r en el frente de onda, la inclinación del mismo, y así la del vector de Poynting, respecto al eje de propagación es $l\lambda/2\pi r$. Esta inclinación hace que la componente azimutal del momento lineal sea

$$\begin{aligned} p_A &= \hbar k_0 \cdot \frac{l\lambda}{2\pi r} \\ &= \hbar \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot \frac{l\lambda}{2\pi r} \\ &= \hbar l / r \end{aligned} \quad \text{Ec. 1}$$

Así, cuando multiplicamos por el radio vector r obtenemos que la cantidad de momento angular orbital en cada punto del frente de onda sea $\hbar l$.

Por supuesto, la existencia del Momento Angular de Espín y Orbital de la luz puede ser derivada de las ecuaciones clásicas de Maxwell (sin cuantización), de donde se obtiene que para una onda helicoidal la cantidad de Momento Angular orbital, es l/ω y para una onda polarizada circularmente la cantidad de Momento Angular de Espin es σ/ω , donde $\sigma = \pm 1$ para polarización derecha o izquierda respectivamente. Ambos resultados del Momento Angular están relacionados con la energía de la onda [7]. Si suponemos entonces que la energía de cada fotón esta cuantizada $\hbar\omega$, luego las expresiones para los Momentos Orbital y de Espin que trasporta cada fotón son $l\hbar$ y $\sigma\hbar$ respectivamente.

Haz Laguerre-Gauss

Buscando una representación matemática adecuada para poder estudiar los haces de luz que transporten Momento Angular Orbital (MAO) se usa la base completa de funciones de Laguerre-Gauss las cuales están dadas por la expresión

$$\begin{aligned} LG_{pl} &= \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}} \frac{1}{w(z)} \left[\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[\frac{-r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \\ &\quad \exp[i l \varphi] \exp \left[\frac{i k_0 r^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp \left[-i(2p + |l| + 1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{Ec. 2}$$

Donde $w(z) = w(0)[(z^2 + z_R^2)/z_R^2]^{1/2}$ es la cintura del haz del haz propagado y $w(0)$ la cintura del haz en $z = 0$; z_R es el rango de Rayleigh y $\exp[-i(2p + |l| + 1)\tan^{-1}(z/z_R)]$ es la fase de Gouy. $L_p^{|l|}(x)$ son los polinomios asociados de Laguerre

$$L_p^{|l|}(x) = (-1)^{|l|} \frac{d^{|l|}}{dx^{|l|}} L_{p+|l|}(x) \quad \text{Ec. 3}$$

Estas funciones describen la forma del campo electromagnetico que producen los siguientes patrones de intensidad (Figura 3).

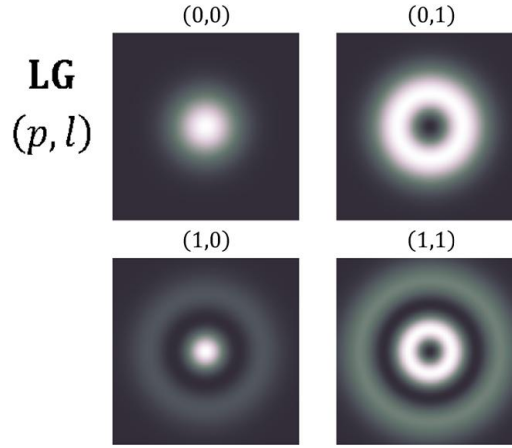


Figura 3. Modos de Laguerre-Gauss para varias combinaciones del número radial y el numero acimutal (p, l) (Figura obtenida de [8]).

La distribucion de intensidad depende del número p y el radio de los anillos luminosos de l , los cuales son obtenidos a partir de las coordenadas cilíndricas después de solucionar la ecuación de Helmholtz (Ec. 4) para el campo en dichas coordenadas [9].

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{E}(x, y, z) = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

El término que contribuye a la propagación del momento angular orbital en los haces Laguerre-Gauss es el término dependiente de la coordenada angular φ y la carga topológica l , la cual es el número cuántico relacionado al momento angular orbital que transporta el sistema.

$$\phi(l, \varphi) = \exp(il\varphi) \quad \text{Ec. 5}$$

Generación de Vórtices Ópticos

Los métodos más frecuentes para generar vórtices ópticos son usando una Máscara fase espiral o mediante la incidencia de un haz de luz plano en un holograma.

Incidencia sobre una Máscara de Fase Espiral

Una máscara de fase o un objeto de fase se define como un objeto óptico que altera la fase del campo incidente que interactúa con él, sin embargo deja la amplitud del mismo inalterada. Un objeto de estos puede tener un espesor variable cuyo material no absorbe luz del campo electromagnético incidente, por esta propiedad son usados ampliamente en investigación en óptica, biología, cristalografía, etc. El funcional relacionado con este tipo de objetos es complejo, por tanto al observar un plano de la propagación de la luz emergente de tales objetos, solo se detectan cambios en la intensidad (el módulo cuadrado de la amplitud) y no sobre la fase introducida al campo incidente. Para obtener información de la fase se han planteado diferentes métodos, por ejemplo el *Método de la Tierra Central Oscura de Observación* en el cual el orden central de difracción es excluido por una ventana oscura; también es usado el *Método de Schlieren* en el cual se excluye todo el espectro de uno de los lados del orden central de difracción. La función de transmisión o forma funcional de la fase introducida por una máscara de fase tiene la forma:

$$F(\mathbf{r}) = e^{i\Phi(\mathbf{r})} \quad \text{Ec. 6}$$

Luego, la luz emergente $U(\mathbf{r})$, del objeto de fase es la multiplicación del campo óptico incidente con la función de transmisión del objeto:

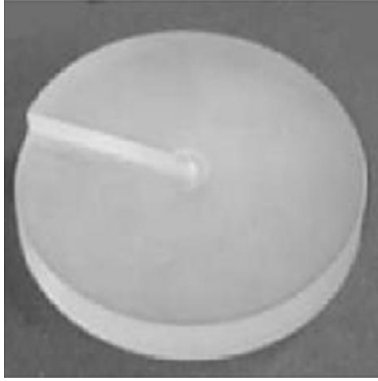
$$T(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\psi(\mathbf{r})} \times e^{i\Phi(\mathbf{r})} \quad \text{Ec. 7}$$

Donde $A(\mathbf{r})e^{i\psi(\mathbf{r})}$, es la función del campo óptico incidente.

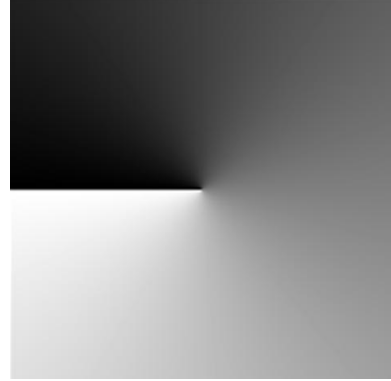
Haciendo incidir una onda plana $U(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, sobre una Máscara de fase espiral (Figura 4) la cual introduce un desfase de la forma mostrada en la Ec. 6, dada por:

$$\phi(r, \varphi) = \exp(il\varphi) \quad \text{Ec. 8}$$

Donde r y φ son las coordenadas polares y l es la carga topológica del vórtice; con la propagación de esta fase introducida en el haz de luz se produce el frente de onda Helicoidal que transporta la información del vórtice óptico (Figura 5).



(a)



(b)

Figura 4. (a) Máscara de Fase Espiral física. (b) Máscara de Fase Espiral en Niveles de Gris.

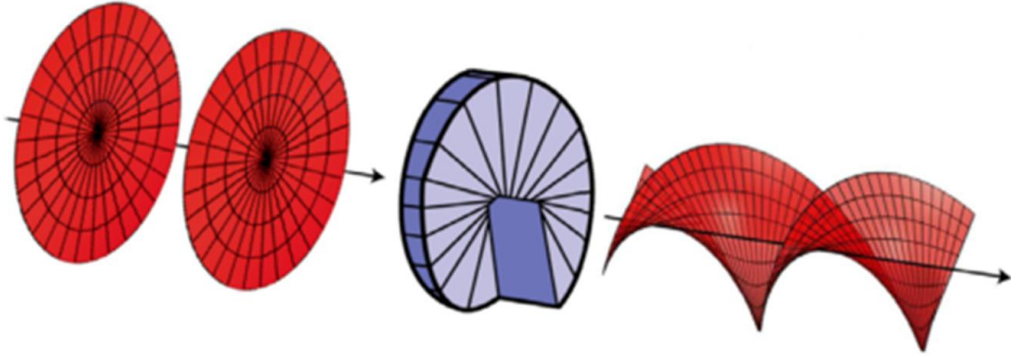


Figura 5. Generación de un vórtice óptico a partir de una Máscara de Fase Espiral.

Incidencia sobre un Holograma

Un holograma se forma a partir de la interferencia de un haz de luz que transporta cierta información característica junto con otro haz que se toma de referencia para poder estudiar y comparar el primero. De esto, se tiene, que el campo obtenido cuando estos dos haces ópticos coinciden espacio temporalmente es [10]:

$$\begin{aligned} U &= U^{(i)} + U^{(s)} = A^{(i)} e^{i\psi_i} + A^{(s)} e^{i\psi_s} \\ &= e^{i\psi_i} (A^{(i)} + A^{(s)} e^{i(\psi_s - \psi_i)}) \end{aligned}$$

Ec. 9

Donde A denota la amplitud real del campo y ψ la fase del mismo. El índice i denota el haz que transporta información, mientras que el índice s denota la onda de referencia. La amplitud del campo en el plano de interferencia u holograma esta dado por:

$$A = \sqrt{UU^*} = \sqrt{(A^{(i)})^2 + (A^{(s)})^2 + 2A^{(i)}A^{(s)} \cos(\psi_s - \psi_i)} \quad \text{Ec. 10}$$

A partir de la Ec. 10 se tiene que cuando un haz Laguerre-Gauss se propaga por el eje z e interfiere con una onda plana que se propaga en la dirección $\vec{k} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}$, formando un ángulo θ con el eje z , la estructura de la fase del holograma es la siguiente [11]:

$$\phi(r, \varphi, z) = l\varphi - \frac{kr^2}{2R} - (2p + l + 1)\psi + kx \sin \theta + kz (\cos \theta - 1) \quad \text{Ec. 11}$$

Donde $R(z)$ es el radio de curvatura del frente de onda del haz Laguerre-Gauss, ψ es la fase de Gouy, l es la carga topológica, x es la coordenada cartesiana del plano de interferencia, p es el número radial asociado a la coordenada cilíndrica r y $k = 2\pi/\lambda$ es el vector de onda. Si consideramos que la interferencia de ambas ondas se da en $z = 0$, donde la cintura del haz Laguerre- Gauss es minima, tenemos que $R(0) \rightarrow \infty$ y la fase de Gouy $\psi = 0$. Así la estructura de la fase del holograma dada en la Ec. 11 queda dada por:

$$\phi(r, \varphi, z) = \phi(x, \varphi) = l\varphi + kx \sin \theta \quad \text{Ec. 12}$$

Esta fase corresponde a la de una rejilla con una dislocación en el centro en forma de tenedor, una de las franjas se rompe en un número de franjas igual al valor de la carga más uno ($l + 1$). El grosor de las franjas de la rejilla está relacionado con el ángulo de incidencia de la onda plana θ , en el plano de interferencia. El holograma generado se conoce en la literatura como *Fork* (Tenedor en inglés, Figura 6). Este holograma puede ser construido computacionalmente usando directamente la Ec. 6 y la Ec. 12, siguiendo los mismos parámetros mencionados: Se hacen interferir un haz que transporta Momento Angular Orbital con una onda de referencia que entra oblicuamente al plano del holograma. Después de generarlo se puede realizar un procedimiento inverso para producir un haz con Momento Angular Orbital. Sobre el holograma se hace incidir una onda de referencia con las mismas características de la usada en la construcción del mismo, y así a la salida del *fork* se obtiene un haz con momento angular como el usado en la interferencia inicial (Figura 7) [5].

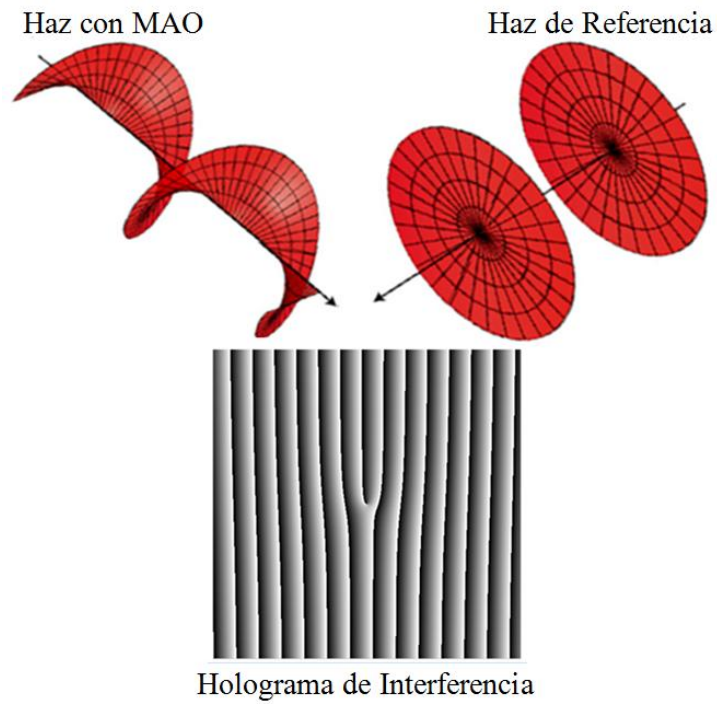


Figura 6. Producción del holograma *Fork*, mediante la interferencia de un haz con MAO y una onda de referencia.

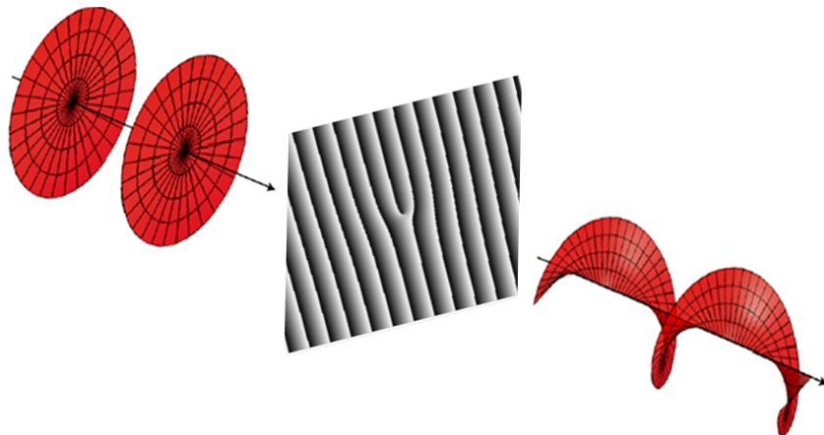


Figura 7. Producción del un Haz con MAO a partir de un holograma *Fork*.

Propagación de la Luz emergente de una Máscara de Fase Espiral

Se realizará un estudio exacto y paraxial de la propagación de la fase introducida por la Máscara de fase Espiral a una onda plana incidente a partir de la investigación realizada por Berry *et al.* [3]. Como se mencionó anteriormente la fase introducida en el campo óptico es de la forma

$$\phi(r, \varphi) = \exp(i\alpha\varphi), (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad \text{Ec. 13}$$

Donde se ha escogido la posición inicial de propagación como $z = 0$. Se hace la distinción de α y l (Ec. 8 y Ec. 13), ya que se hará el estudio de esta propagación para valores enteros y fraccionarios de la carga topológica.

Para α entero

Consideremos a α entero en la Ec. 13 y las coordenadas que se necesitan para el estudio de la propagación de la fase que empieza en $z = 0$, con intensidad unitaria y una discontinuidad en la fase de $2\pi\alpha$, de la siguiente manera (Figura 8):

$$\mathbf{r} = \{x, y, z\}$$

$$\mathbf{R} = \{x, y\} = R \{\cos \varphi, \sin \varphi\} \quad \text{Ec. 14}$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{z}} = \{\xi, \eta\}$$

$$\Psi_\alpha(\mathbf{R}, 0) = \exp(i\alpha\varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad \text{Ec. 15}$$

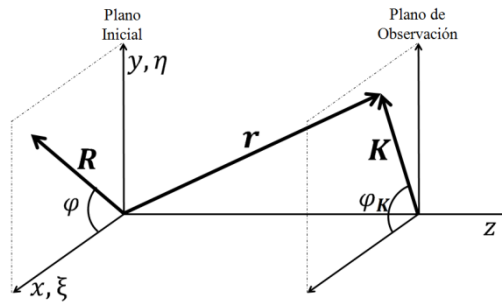


Figura 8. Sistema de coordenadas usado en la descripción teórica.

La propagación de una onda puede ser escrita como la superposición de de ondas planas con vectores de onda transversal $\mathbf{K} = K(K_x, K_y) = K(\cos \varphi_K, \sin \varphi_K)$, recordando que α es un entero

$$\Psi_\alpha(\mathbf{r}) = \int \int_{\mathbf{K} \text{ plane}} d\mathbf{K} a_n(\mathbf{K}) \exp \left\{ i \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + z\sqrt{1 - K^2} \right) \right\} \quad \text{Ec. 16}$$

Hacemos $\alpha = n$ para dejar claro que es un entero. En la Ec. 16 la amplitud $a_n(\mathbf{K})$ esta dada por la Transformada de Fourier del campo inicial (Ec. 15).

$$a_n(\mathbf{K}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\mathbf{R} \text{ plane}} d\mathbf{R} \exp \{ i(\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + n\varphi) \} \quad \text{Ec. 17}$$

Al hacer el producto punto $\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}$ se obtiene un argumento del exponencial de la forma $\cos(\varphi - \varphi_K)$. Luego al integrar sobre la coordenada R obtenemos un termino $1/K$ y sobre la coordenada φ se obtiene $\frac{2\pi\delta(\varphi - \varphi_K)}{K}$. Luego la integral de la Ec. 17 se vuelve:

$$a_n(\mathbf{K}) = \frac{|n|}{4\pi^2} \frac{1}{K} \frac{2\pi\delta(\varphi - \varphi_K)}{K} \exp(in\varphi) = \frac{|n|(-i)^{|n|}}{2\pi K^2} \exp(in\varphi_K) \quad \text{Ec. 18}$$

Reemplazando en la Ec. 16 tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(\mathbf{r}) &= \int \int_{\mathbf{K} \text{ plane}} d\mathbf{K} \frac{|n|(-i)^{|n|}}{2\pi K^2} \exp(in\varphi_K) \\ &\quad \times \exp \left\{ i \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + z\sqrt{1 - K^2} \right) \right\} \\ \Psi_\alpha(\mathbf{r}) &= \int \int K dK d\varphi_K \frac{|n|(-i)^{|n|}}{2\pi K^2} \exp(in\varphi_K) \\ &\quad \times \exp \left\{ i \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + z\sqrt{1 - K^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \text{Ec. 19}$$

Veamos que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} = RK \cos \varphi \cos \varphi_K + RK \sin \varphi \sin \varphi_K = RK \cos(\varphi - \varphi_K)$$

Y definimos el coeficiente

$$A(K) = \frac{|n|(-i)^{|n|}}{2\pi K} e^{iz\sqrt{1-K^2}}$$

Reescribiendo la Ec. 19

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \int dK A(K) \int d\varphi_K e^{in\varphi_K} e^{iRK \cos(\varphi - \varphi_K)}$$

Reemplazando $\varphi_K - \varphi = u$

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \int dK A(K) \int du e^{in(\varphi+u)} e^{iRK \cos u}$$

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \int dK A(K) e^{in\varphi} \int du e^{inu} e^{iRK \sin(\frac{\pi}{2} - u)}$$

Reemplazando $\tau = \frac{\pi}{2} - u$

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) &= - \int dK A(K) e^{in\varphi} \int d\tau e^{in(\frac{\pi}{2} - \tau)} e^{iRK \sin(\tau)} \\ &= - \int dK A(K) e^{in\varphi} e^{in\frac{\pi}{2}} \int d\tau e^{-in\tau} e^{iRK \sin(\tau)} \end{aligned}$$

Recordando que $e^{in\frac{\pi}{2}} = i^n$

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = -i^n \int dK A(K) e^{in\varphi} \int d\tau e^{-i(n\tau - RK \sin(\tau))} \quad \text{Ec. 20}$$

La integral sobre τ es una función de Bessel [12]

$$\int \frac{d\tau}{2\pi} e^{-i(n\tau - x \sin(\tau))} = J_n(x)$$

Donde $J_n(x)$ es la función de Bessel, luego la Ec. 20:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) &= i^{|n|} e^{in\varphi} \int dK \frac{|n|(-i)^{|n|}}{2\pi K} e^{iz\sqrt{1-K^2}} 2\pi J_n(RK) \\ &= i^{|n|} e^{in\varphi} \int dK \frac{|n|(-i)^{|n|}}{K} e^{iz\sqrt{1-K^2}} J_n(RK) \\ \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) &= |n| e^{in\varphi} \int dK \frac{1}{K} e^{iz\sqrt{1-K^2}} J_n(RK) \end{aligned} \quad \text{Ec. 21}$$

Llamaremos ψ a la aproximación paraxial de la función de onda, para diferenciarla de la función de onda exacta Ψ . En la aproximación paraxial $K < 1$, así que el término de la raíz se puede aproximar a $1 - K^2/2$

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = |n|e^{in\varphi} \int dK \frac{1}{K} e^{iz} e^{-iz K^2/2} J_n(RK)$$

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = |n| \exp\{i(n\varphi + z)\} \int dK \frac{1}{K} e^{-\frac{1}{2}z K^2} J_{|n|}(RK) \quad \text{Ec. 22}$$

Resolviendo esta integral con la ayuda del software Mathematica, se obtuvo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\mathbf{r}) = & \frac{|n| \exp\{i(n\varphi + z)\}}{\sqrt{\frac{iz}{2}} \Gamma(1 + |n|)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(|n| + 1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}|n|\right) \times \\ & 2^{|n|} e^{\left(\frac{iR^2}{4z}\right)} R \left\{ \frac{1}{8} J_{\frac{1}{2}(|n|-1)}\left(-\frac{iR^2}{4z}\right) + \frac{1}{8} J_{\frac{1}{2}(|n|+1)}\left(-\frac{iR^2}{4z}\right) \right\} \end{aligned} \quad \text{Ec. 23}$$

De aquí haciendo un trabajo algebraico y definiendo la función $P_n(\rho)$, se llega a:

$$\frac{P_n(\rho)}{|n|} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} (-i)^{|n|/2} \rho e^{\left(\frac{i\rho^2}{4}\right)} \rho \left\{ J_{\frac{1}{2}(|n|-1)}\left(-\frac{i\rho^2}{4}\right) - i J_{\frac{1}{2}(|n|+1)}\left(-\frac{i\rho^2}{4}\right) \right\} \quad \text{Ec. 24}$$

Donde $\rho = R/\sqrt{z}$; luego la Ec. 23:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \exp\{i(n\varphi + z)\} P_n(\rho) \quad \text{Ec. 25}$$

Conociendo la expresión para la función de onda exacta y para la aproximación paraxial, nos disponemos a graficarlas para estudiar sus comportamientos. Para dicho estudio tomamos $\alpha = n = 1$ (Figura 9).

Para este valor de n la función de onda exacta se vuelve (Ec. 21)

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{r}) &= e^{i\varphi} \int dK \frac{1}{K} e^{iz\sqrt{1-K^2}} J_1(RK) \\ |\Psi_1(\mathbf{r})| &= \left| \int dK \frac{1}{K} e^{iz\sqrt{1-K^2}} J_1(RK) \right| \end{aligned} \quad \text{Ec. 26}$$

Y la onda paraxial:

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \exp\{i(\varphi + z)\}P_1(R/\sqrt{z})$$

$$|\psi_1(\mathbf{r})| = |P_1(R/\sqrt{z})|$$

Ec. 27

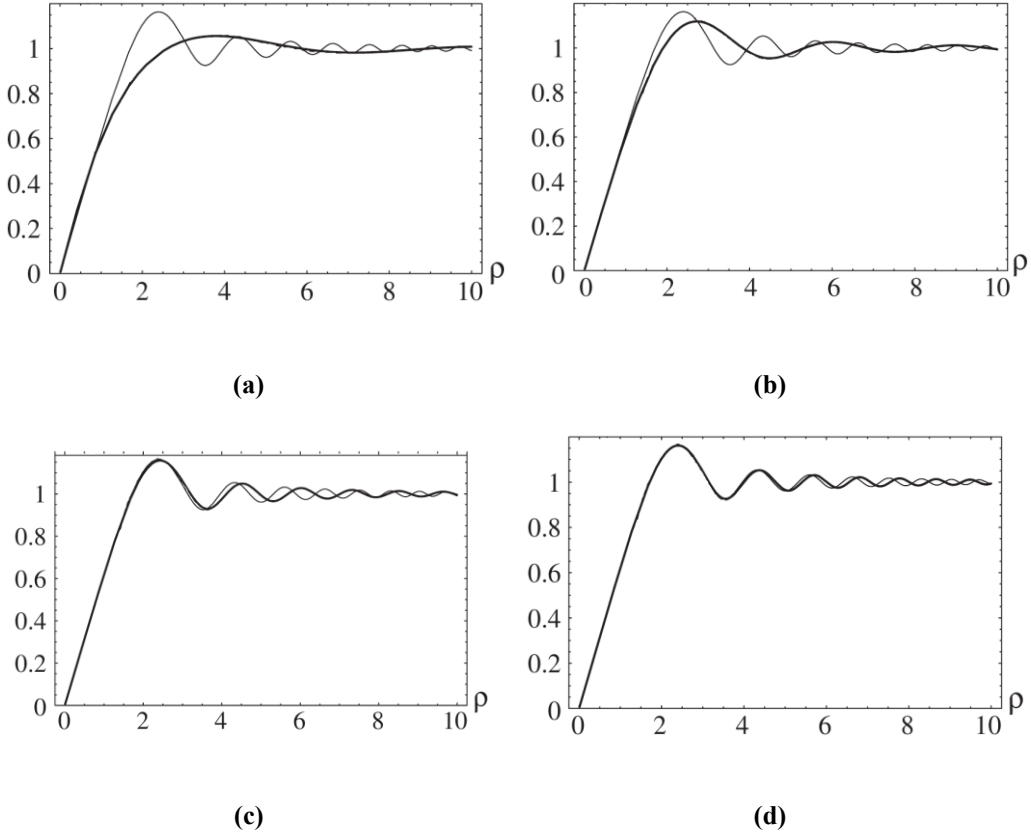


Figura 9. Funciones de onda exacta (línea gruesa) y paraxial (línea delgada), para una propagación de: (a) $z = 1$. (b) $z = 5$. (c) $z = 50$. (d) $z = 200$. (Figura tomada de [13]).

En la Ec. 21 reemplazamos la función de Bessel por la identidad:

$$J_n(RK) = \frac{\left(\frac{RK}{2}\right)^{|n|}}{\Gamma(|n| + 1)}$$

Luego

$$\Psi_\alpha(\mathbf{r}) = |n| \frac{e^{in\varphi} R^{|n|}}{2^{|n|} \Gamma(|n| + 1)} \int_0^\infty dK K^{|n|-1} e^{iz\sqrt{1-K^2}} \quad \text{Ec. 28}$$

Cercanías al eje de Propagación

Para estudiar las cercanías de la función de onda, al eje de propagación se hace $R \rightarrow 0$, luego la Ec. 28:

$$\Psi_\alpha(R \rightarrow 0, z) = |n| \frac{i\pi e^{in\varphi} R^{|n|}}{2^{\frac{1}{2}(3|n|+1)} \Gamma(\frac{1}{2}(|n|+1)) z^{\frac{1}{2}(|n|-1)}} H_{\frac{1}{2}(|n|+1)}^{(1)}(z) \quad \text{Ec. 29}$$

Donde $H_\nu^{(1)}$ es la función de Hankel (Función de Bessel de tercera clase) y se ha usado la identidad de las funciones de Hankel

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty+i\pi} e^{x \sinh t - at} dt$$

Haciendo un procedimiento análogo para la función de onda paraxial se obtiene que:

$$\psi_\alpha(R \rightarrow 0, z) = \exp\{i(n\varphi + z)\} \sqrt{\pi} \left(\frac{-i}{8}\right)^{\frac{1}{2}|n|} \frac{\left(\frac{R}{\sqrt{z}}\right)^{|n|}}{\Gamma(\frac{1}{2}(|n|+1))} \quad \text{Ec. 30}$$

Comparando la Ec. 29 y la Ec. 30 (Figura 10) vemos que por sus comportamientos asintóticos para $z > 0$, ambas funciones se aproximan y para $z > 10$ las funciones son las mismas.

Para α fraccional

Cuando el valor de la carga topológica no es entero, la onda inicial (Ec. 8) además de tener una indeterminación de la fase en el origen ($r = 0$) también posee una discontinuidad a lo largo del eje x ($\varphi = 0$) [13]. Esta discontinuidad en la fase sobre el eje $\varphi = 0$, está presente en las fases iniciales es decir, en las mascararas de fase usadas para valores fraccionales de la carga topológica (Figura 11).

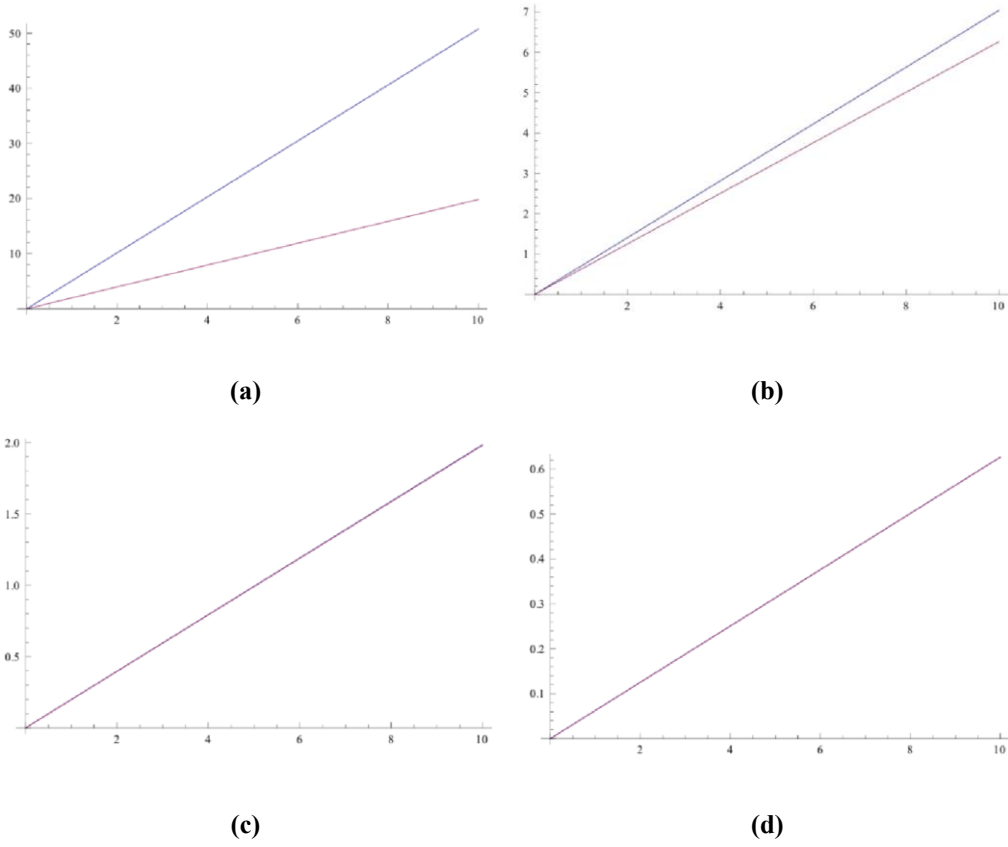


Figura 10. Se muestran las funciones de onda exacta (línea azul, Ec. 29) y paraxial (línea roja, Ec. 30) para $n = 1$ y cercanas al eje de propagación, en función de R con z constante. (a) $z = 0.1$. (b) $z = 1$. (c) $z = 10$. (d) $z = 100$.

Comencemos expresando la serie de Fourier de $\exp(i\alpha\varphi)$:

$$\Psi_{\alpha}(R, 0) = \exp(i\alpha\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} \quad \text{Ec. 31}$$

Donde el coeficiente C_n esta dado por:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi i(\alpha-n)} 2i \sin(\alpha\pi - n\pi) \\ &= \frac{1}{\pi(\alpha-n)} \sin(\alpha\pi) \end{aligned} \quad \text{Ec. 32}$$

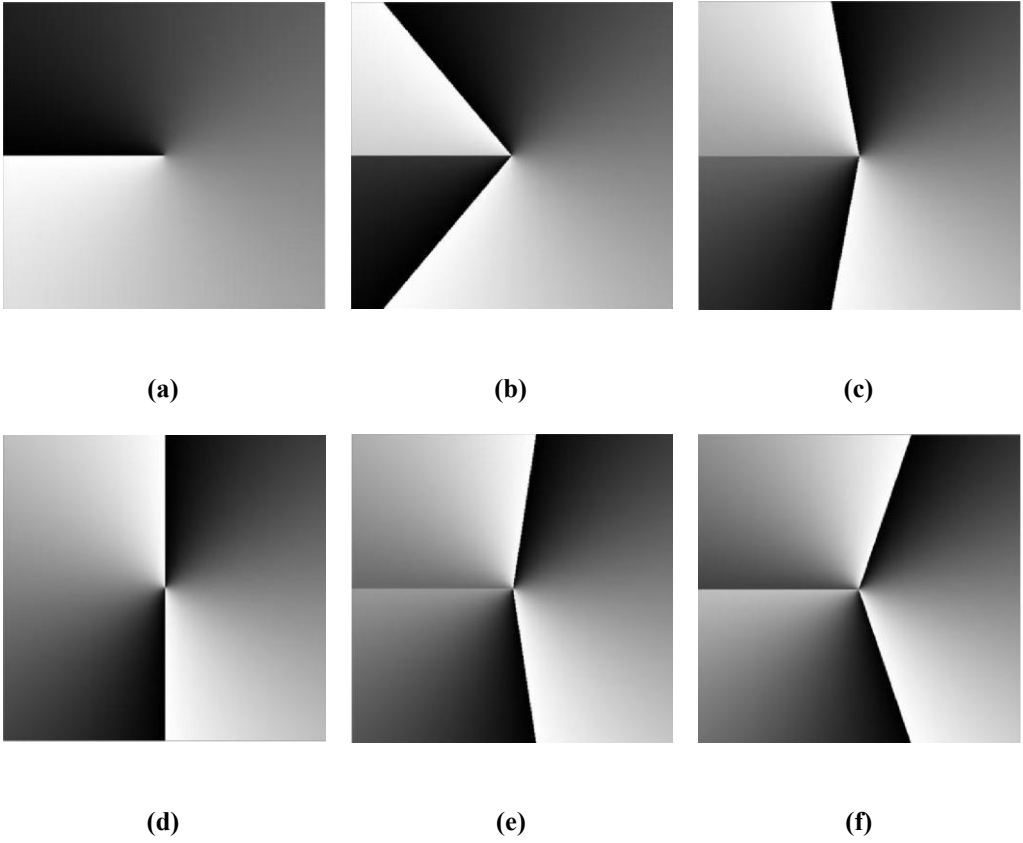


Figura 11. Fase inicial ($r = 0$) para: (a) $\alpha = 1$. (b) $\alpha = 1.4$. (c) $\alpha = 1.8$. (d) $\alpha = 2$. (e) $\alpha = 2.2$. (f) $\alpha = 2.5$.

Así la ecuación de la serie de Fourier (Ec. 31):

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{R}, 0) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(\alpha - n)} \sin(\alpha\pi) e^{in\varphi} \quad \text{Ec. 33}$$

La serie de Fourier obtenida tiene el siguiente comportamiento (Figura 12):

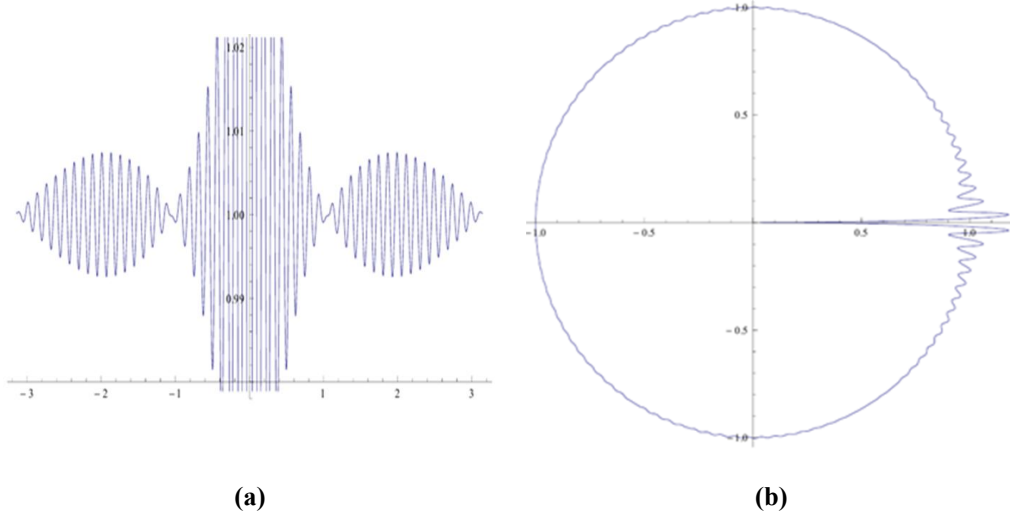


Figura 12. Densidad de la función de onda exacta $|\Psi|$ en función de φ , para $\alpha = 1.5$ en: (a) en el plano XY y la (b) el plano polar.

De la Figura 12 se nota como el eje $\varphi = 0$ efectivamente presenta un comportamiento diferente comparado con cualquier dirección en el plano transversal de la función de onda.

Recordando la expresión obtenida para la función de onda exacta para α entero en el momento inicial de la propagación (Ec. 15), la Ec. 33 puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha\pi}}{\pi(\alpha - n)} \sin(\alpha\pi) e^{in\varphi} = \frac{e^{i\alpha\pi} \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_n(\mathbf{r})}{(\alpha - n)} \quad \text{Ec. 34}$$

Y para la aproximación paraxial

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\alpha\pi} \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n\varphi+z)} P_n(\rho)}{(\alpha - n)} \quad \text{Ec. 35}$$

Por la dependencia lineal de $P_n(R, z)$ de R tenemos que la función paraxial para α fraccional se anula sobre el eje de propagación ($R = 0$). Sin embargo, sobrevive un

término de la sumatoria de la Ec. 35 y es para $n = 0$ [13]. Para estudiar el comportamiento de la función de onda paraxial graficamos su densidad $|\psi_\alpha|$:

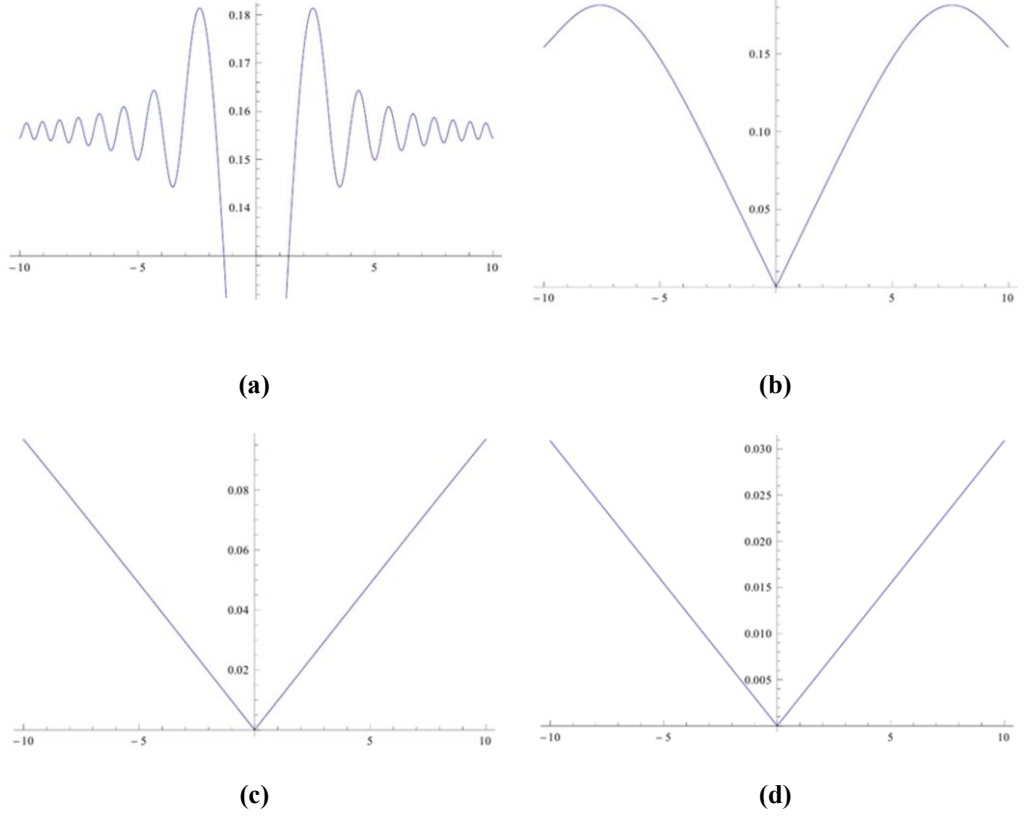


Figura 13. Gráfica de $|\psi_\alpha|$ en función de R para $\alpha = 2.2$ y $\varphi = \pi/3$, propagada a: (a) $z = 1$. (b) $z = 10$. (c) $z = 100$. (d) $z = 1000$.

En la Figura 13 vemos que al propagarse la función de onda se va estabilizando para un φ constante, deja de ser oscilatoria. Se muestra también el mismo estudio para diferentes valores de φ lo que prueba que la simetría acimutal permanece (Figura 14). Al variar la carga de la densidad graficada, se encuentra que las condiciones encontradas de estabilización y simetría para el caso específico mostrado (Figura 13 y Figura 14), se conservan.

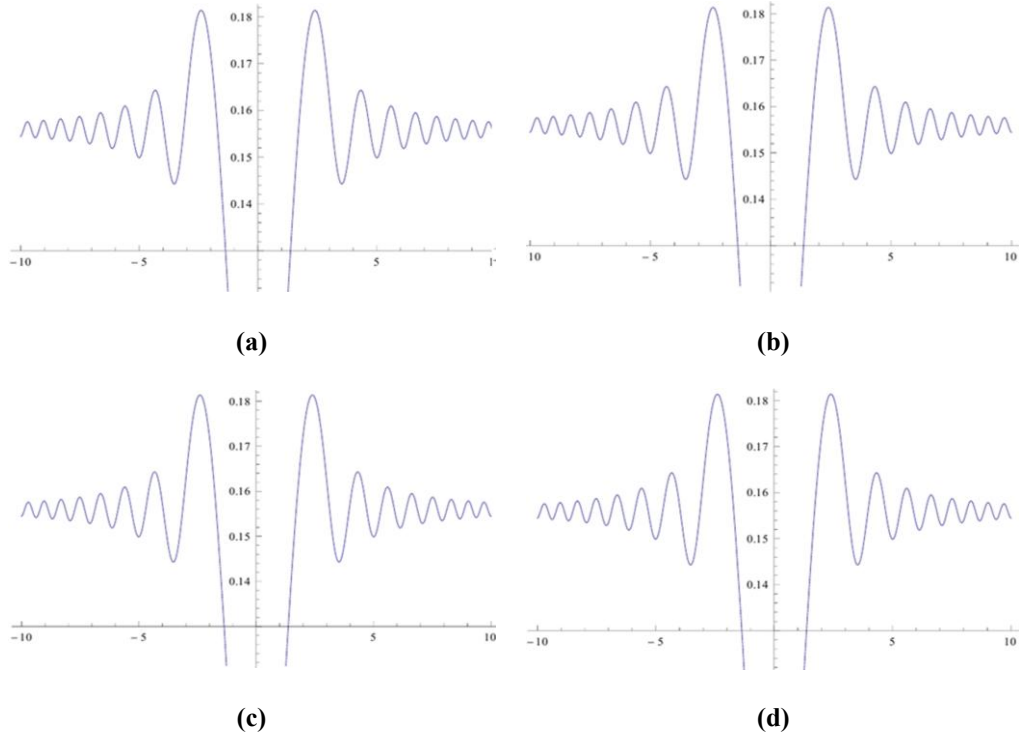


Figura 14. Grafica de $|\psi_\alpha|$ en función de R para $\alpha = 2.2$ y $z = 1$, para un φ constante: (a) $\varphi = -\pi$. (b) $\varphi = -\pi/3$. (c) $\varphi = \pi/3$. (d) $\varphi = \pi$.

A continuación se muestra la densidad de la función paraxial $|\psi_\alpha|$ para $\alpha = 2.2$, en las coordenadas consideradas inicialmente en la Ec. 14 (Figura 15).

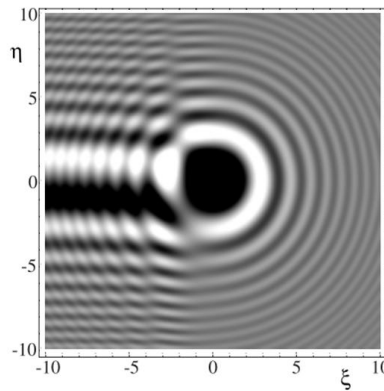


Figura 15. Gráfica de la densidad de la función paraxial Ec. 35 en el plano (η, ξ) , para $\alpha = 2.2$.

En la Figura 15 se observa que el campo óptico presenta poca intensidad de luz para la zona cercana al eje de propagación ($R = 0$) y una línea oscura en $\varphi = 0$; también franjas paralelas a este eje producidas por la difracción del salto de fase que esta sobre

este eje, en la fase inicial (Figura 11). La línea oscura que aparece en la propagación se debe al salto de fase que aparece sobre el mismo eje en la máscara de fase (Figura 11 (e)). Pero ¿Por qué para los saltos de fase normales de una Máscara de fase de carga entera no aparece esta línea? Recordemos que los saltos de fase en estos casos, al igual que en algunos que aparecen en la Máscara de fase de carga fraccionaria, son saltos de FASE de 0 a 2π ; lo que indica que no hay cambio en la onda por lo que la fase 0 y 2π es igual. Mientras que el salto de fase que genera la línea oscura en la propagación, no es un salto de fase de esta manera sino que es de una fase a otra. Para probar esto se toma la fase mostrada en Figura 11e. se rota y se propaga, y así encontrar que la línea oscura en la propagación también rota.

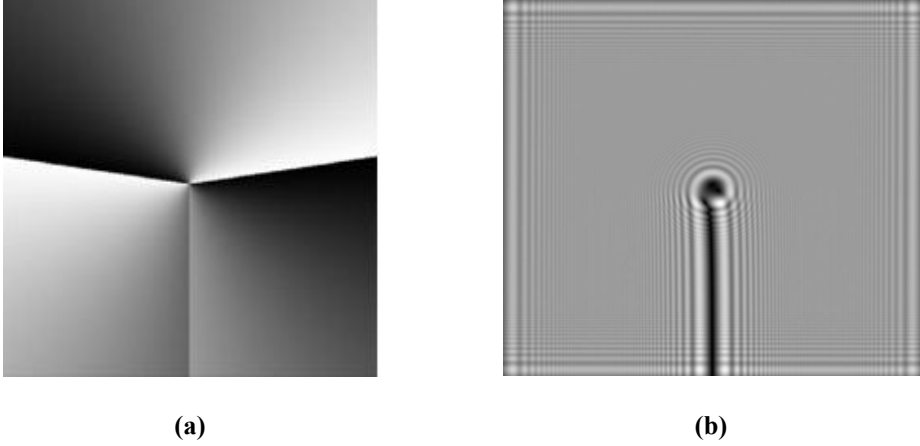


Figura 16. (a) Máscara de fase de carga $l = 2,2$ rotada. (b) Propagación de 500mm de la Máscara de fase mostrada en (a).

Al realizar ciertos procesos matemáticos y considerar el campo óptico solo para valores del plano transversal tal que $\xi \gg 0$ se llega a la siguiente expresión que da cuenta de las características mencionadas (Apéndice B de [13]):

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \exp\{i(z + \alpha(\varphi + \pi))\} \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha\pi - i \sin \alpha\pi \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\eta\sqrt{1-i}\right) \\ -\frac{i\alpha}{\rho^2} \exp\left\{i\left(\frac{1}{2}(\rho^2 + \pi\alpha)\right)\right\} \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\pi\right\} \sin \alpha\pi}{\eta} (1 - \exp(-i\alpha\varphi)) \end{array} \right\} \quad \text{Ec. 36}$$

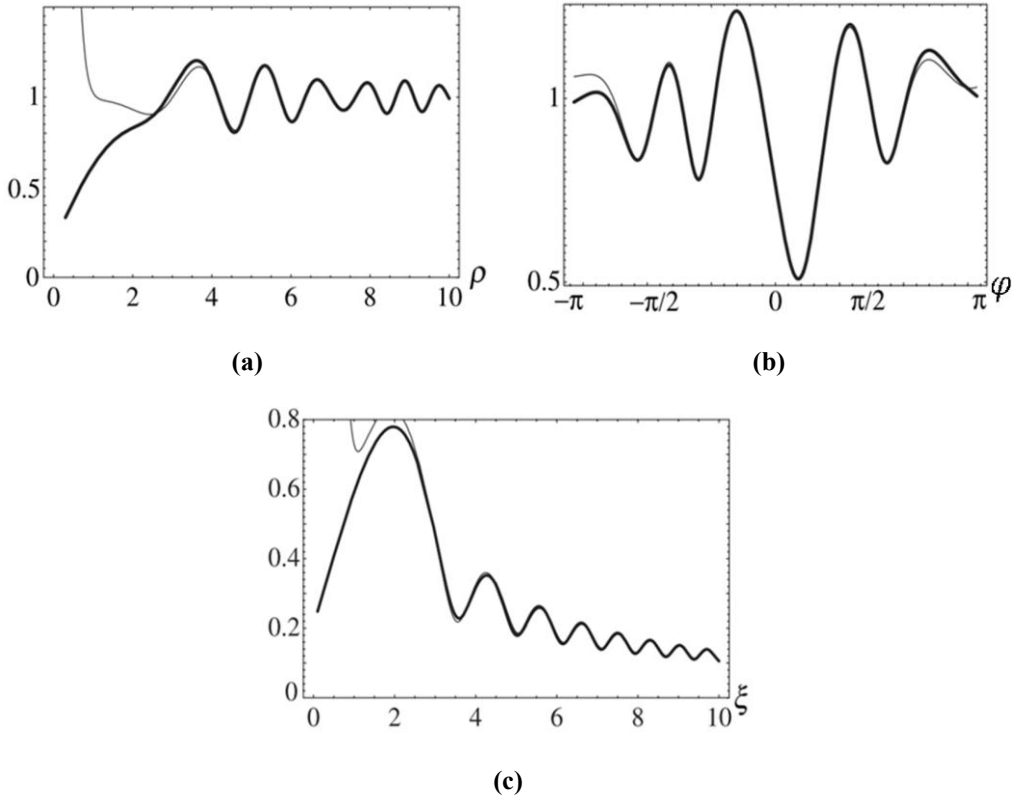


Figura 17. Funciones de onda paraxial y la aproximación a ésta dada por la Ec. 36 para $\xi > 0$. Los trazos gruesos son las curvas paraxiales y los delgados son las curvas de la aproximación dada por la Ec. 36 (a) grafica radial para $\alpha = 1.25$, $\varphi = \pi/3$. (b) Gráfica angular $\alpha = 1.25$, $\rho = 5$. (c) $\alpha = 1.5$, $\varphi = 0$.

Los dos primeros términos dentro de las llaves de la Ec. 36 tienen la información del plano de onda helicoidal y de la difracción producida por el salto de fase en $\varphi = 0$, en la fase inicial. Mientras que el ultimo termino da la información de la difracción producida por la singularidad en $r = 0$. De lo anterior se concluye que sobre el eje de propagación no hay un vórtice estructurado sino que se genera una línea de vórtices con carga ± 1 cuya superposicion da una carga topológica igual al entero mas cercano a α . Esta línea se produce por la interferencia de la propagación de la fase espiral $\exp[i(\alpha\varphi + kz)]$ y la onda dispersada desde $r = 0$ [13]. A continuación se grafican por separado cada uno de los términos de la Ec. 36 para hacer un estudio más detallado de estos.

El comportamiento del primer término dentro de las llaves de la Ec. 36 es (Figura 18):

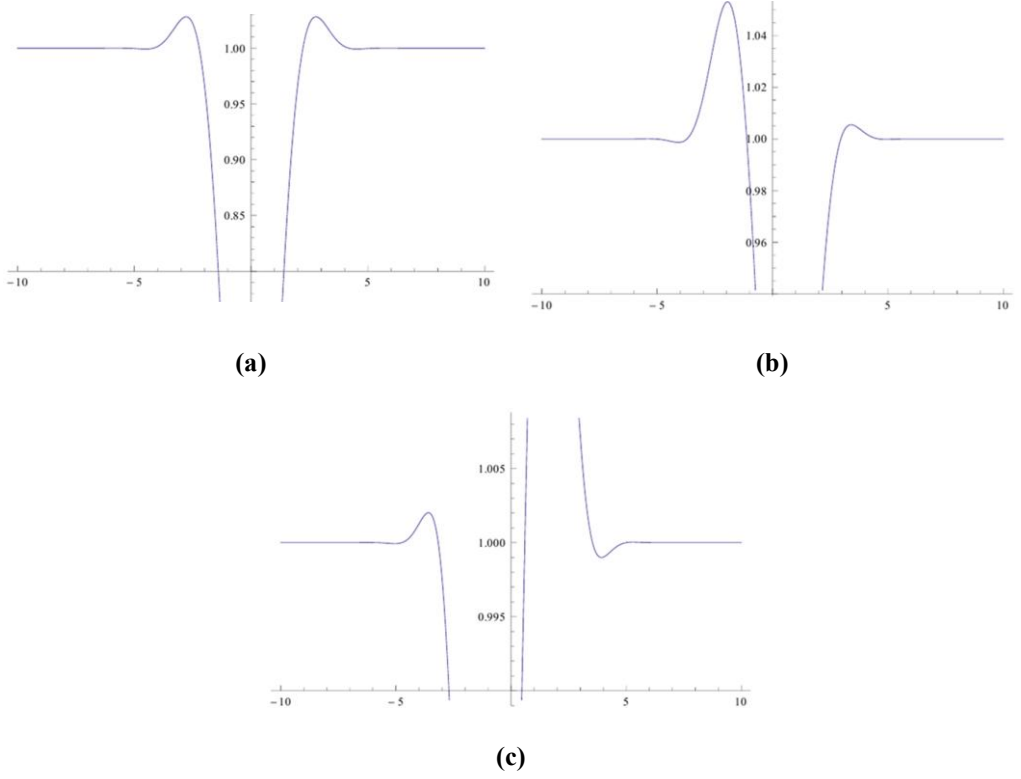


Figura 18. Grafica del primer término que está dentro de las llaves de la Ec. 36 en función de η con: (a) $\alpha = 1.5$, (b) $\alpha = 2.2$, (c) $\alpha = 3.9$.

De la Figura 18 podemos concluir que este término es el que describe las franjas luminosas (primer orden de difracción) más cercanas al eje $\xi > 0$ producidas por la difracción del salto de fase en $\varphi = 0$. Para cargas semienteras estas franjas tienen la misma intensidad y son simétricas respecto al eje ξ . Si la carga es $\alpha = n + m$ donde $m < 0.5$, la franja que está por encima del eje ξ es la más luminosa; mientras que si $m > 0.5$, la franja que está por debajo del eje ξ es la más luminosa.

Para el segundo término se tiene lo siguiente en función de η para $\alpha = 1.5$ y valores de φ constantes: $\varphi = -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$. Los resultados para los diferentes valores angulares son totalmente iguales a los mostrados en la Figura 19.

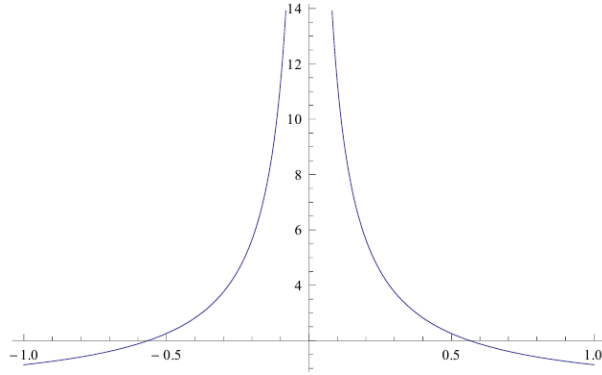


Figura 19. Grafica del segundo término dentro de llaves de la Ec. 36 en función de η , para $\alpha = 1.5$ y $\varphi = -\pi$.

De los resultados obtenidos para el segundo termino de la Ec. 36, se encontró que no hay cambios para diferentes valores de φ . Por otro lado graficando en el plano polar para diferentes valores de η ($\eta = 0.5, 1, 1.5, 2$) se obtienen graficas similares (Figura 20) para el mismo valor de la carga α , solo cambia que al aumentar el valor de η , los interceptos con los ejes son más cercanos a 0, y presentan el siguiente comportamiento.

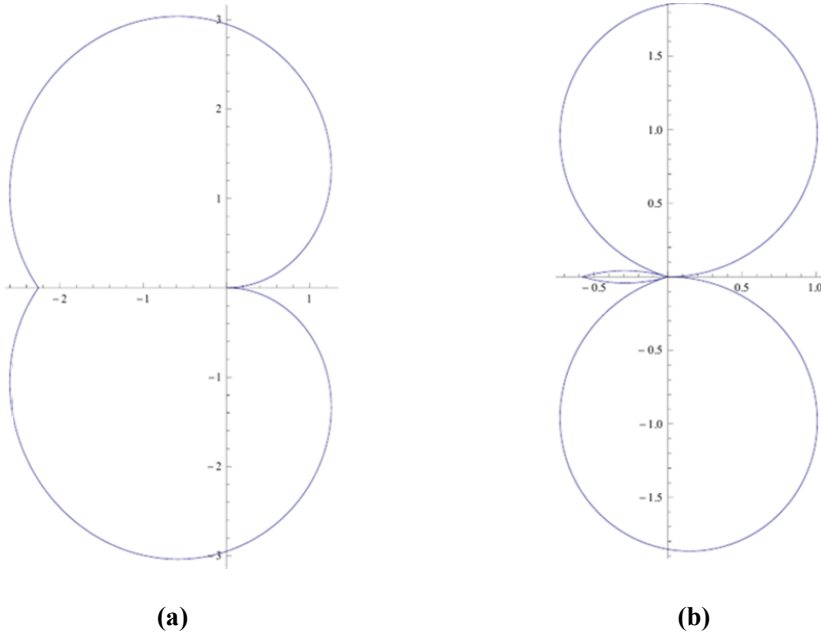
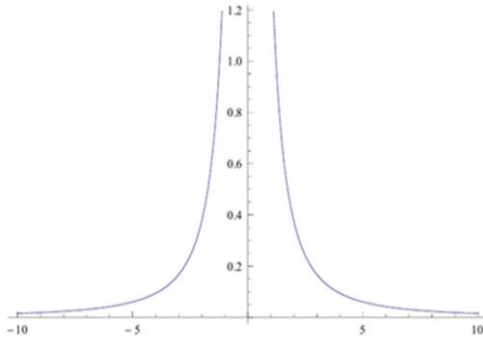
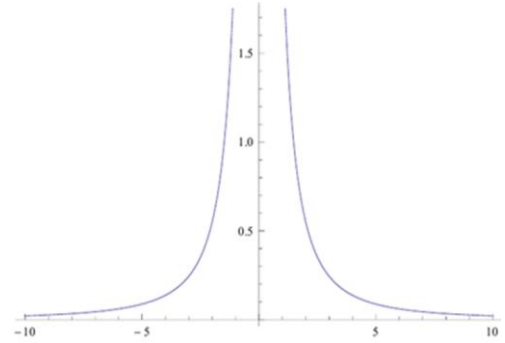


Figura 20. Gráfica polar segundo término dentro de llaves de la Ec. 36 en función de φ , con $\eta = 0.5$ y carga topológica: (a) $\alpha = 1.5$. (b) $\alpha = 2.2$

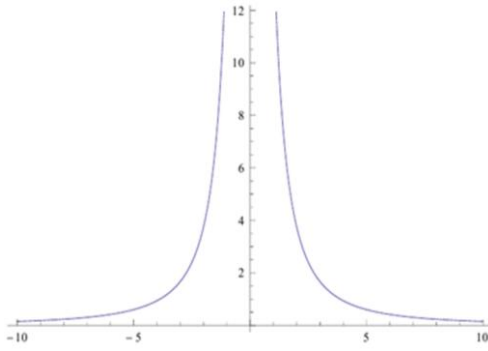
Para el tercer término se obtiene algo que puede ser lo que se está buscando puesto que la singularidad en $R = 0$ se hace más pronunciada al propagarse la onda (Note que para z grande los valores en el eje y son mayores, Figura 21).



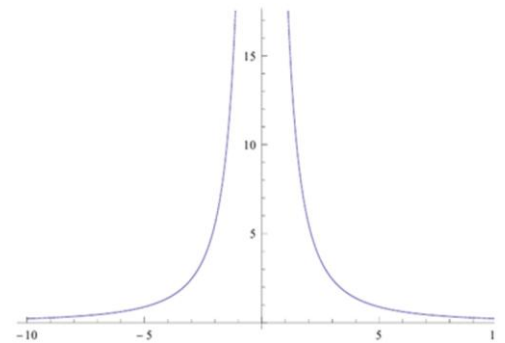
(a)



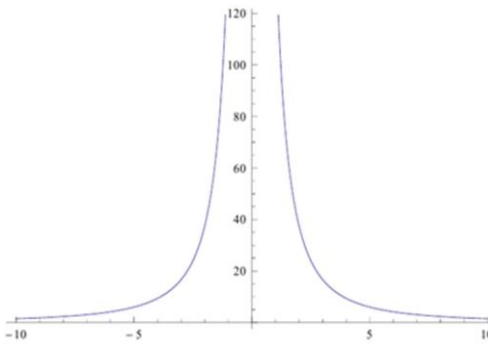
(b)



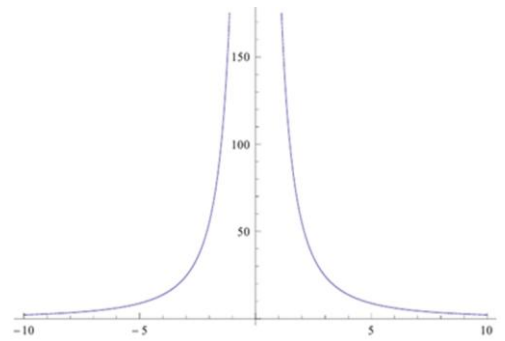
(c)



(d)



(e)



(f)

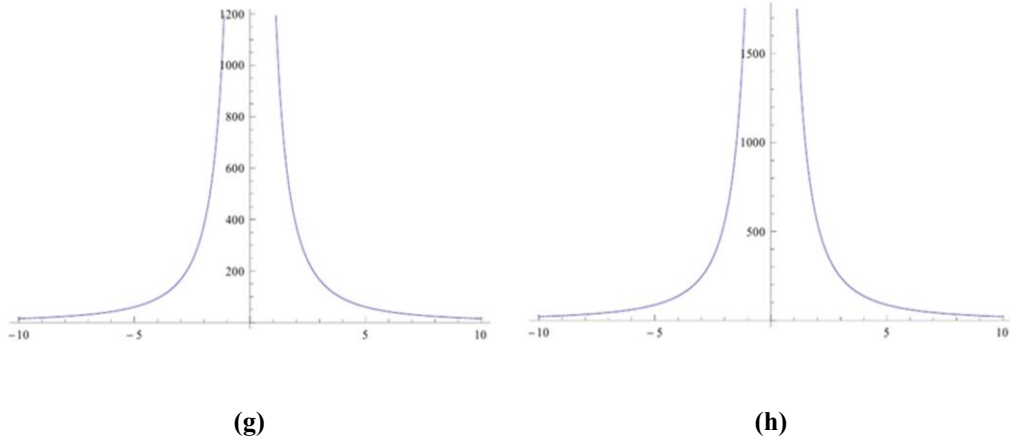


Figura 21. Gráfica del tercer término de la Ec. 36 en función de R para una carga topológica y una propagación de: (a) $\alpha = 1.5$ y $z = 1$. (b) $\alpha = 2.2$ y $z = 1$. (c) $\alpha = 1.5$ y $z = 10$. (d) $\alpha = 2.2$ y $z = 10$. (e) $\alpha = 1.5$ y $z = 100$. (f) $\alpha = 2.2$ y $z = 100$. (g) $\alpha = 1.5$ y $z = 1000$. (h) $\alpha = 2.2$ y $z = 1000$.

Propagación de la Luz emergente de un Holograma tipo *Fork*

El estudio de propagación del campo emergente del holograma se hará un poco más descriptivo que para la luz saliente de la máscara de fase, puesto que la investigación de vórtices que se realizara posteriormente se tomara la Máscara de Fase para producirlos. La fase introducida a una onda plana incidente en el holograma (Ec. 12) genera una estructura de amplitud $a(\phi(\mathbf{r}))$ la cual da la información sobre la estructura de la onda emergente del holograma [11]

$$T(r, \varphi) = a(\phi(r, \varphi)) \quad \text{Ec. 37}$$

Acotando los valores de la fase ϕ , la estructura de amplitud se convierte en una estructura binaria:

$$a(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{mod}(\phi, 2\pi) \leq \pi \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \quad \text{Ec. 38}$$

Esta estructura es fácil de construir experimentalmente y por la versatilidad de solo tener dos niveles de gris el estudio que se hace de la transmitancia del holograma se realiza considerando este caso. Esta estructura (Ec. 38) puede ser expandida en series de Fourier

$$a(\phi) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \exp(in\phi) \quad \text{Ec. 39}$$

El coeficiente de la expansión A_n sea la estructura de amplitud binaria o sinusoidal, se expresa de la siguiente manera:

$$A_n = \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n\pi} \exp\left(-\frac{in\pi}{2}\right) \quad \text{Ec. 40}$$

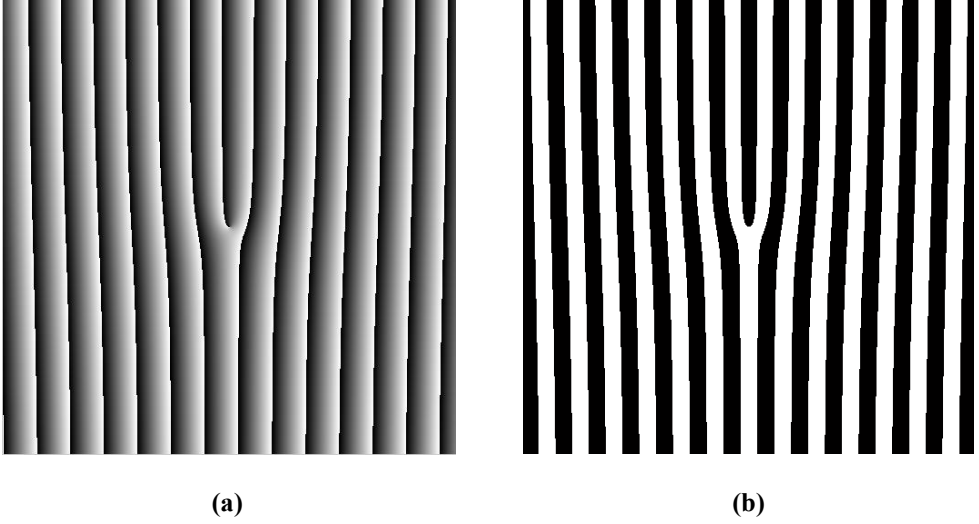


Figura 22. (a) Estructura de Fase de un holograma en forma de Fork con una dislocación en el centro. Las regiones oscuras equivalen a fase 0 y las zonas blancas equivalen a fase 2π . (b) Estructura de (a) con amplitud binaria.

Cuando se ilumina con una onda plana, que escrita en la base de Laguerre-Gauss, $U_{00}^{LG}(r, \varphi)$, el holograma de la Ec. 37, el campo óptico emergente es [11]:

$$U_i(r, \varphi) = U_{00}^{LG}(r, \varphi) \cdot T(r, \varphi) \quad \text{Ec. 41}$$

Y considerando exclusivamente la forma del campo lejano, a partir de la transformada de Fourier bidimensional de $U_i(r, \varphi)$, denotada por $\mathcal{F}\{*\}$:

$$U_f(\omega_r, \omega_\varphi) = \mathcal{F}\{U_i(r, \varphi)\} \quad \text{Ec. 42}$$

Donde $(\omega_r, \omega_\varphi)$ son las coordenadas polares del espacio de frecuencias. Un método usual para determinar la forma analítica de la Ec. 42 es descomponer el campo U_i

como una superposición de haces de Laguerre-Gauss y luego aplicar la transformada de Fourier [14].

$$U_f(\omega_r, \omega_\varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \sum_{p=0}^{\infty} c_p i^{2p+|nl|} U_{p,nl}^{LG}(\omega_r, \omega_\varphi) \otimes [\delta(\omega_x - nk \sin \theta) \delta(\omega_y)] \quad \text{Ec. 43}$$

Donde \otimes denota el operador convolución, (ω_x, ω_y) son las coordenadas cartesianas del espacio frecuencial y c_p es el coeficiente de descomposición del campo difractado y esta dado por:

$$c_p = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_{00}^{LG}(r, \varphi) \cdot \exp(inl\varphi) \cdot U_{p,nl}^{LG*}(\omega_r, \omega_\varphi) r dr d\varphi \quad \text{Ec. 44}$$

De la

Ec. 43, encontramos que el campo lejano se entiende como una superposición de haces Laguerre-Gauss con número cuántico acimutal nl .

Generación y Caracterización

4

Generación de Vórtices Ópticos Computacionales

Considerando la teoría de generación de vórtices, se implementaron códigos en la plataforma Matlab para simular la evolución espacial de la propagación de la luz incidente en Máscaras de Fase y en Hologramas Tipo *Fork*. También implementando construcciones matemáticas como la transformada de Fourier (Ec. 45) y la transformada rápida de Fourier se pudo realizar estudios de la distribución del campo óptico en el plano de Fourier (Ec. 46, [10]), además de la utilización de ecuaciones de transferencia (

Ec. 47) se investigó esta misma distribución para diferentes propagaciones.

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad \text{Ec. 45}$$

$$X_k = \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi k x_n} \quad \text{Ec. 46}$$

Donde X_k son los valores en cada punto discreto del plano de Fourier, x_n son las componentes del plano inicial a propagar.

$$H = \exp \left\{ \frac{i2\pi z}{\lambda} - i\pi \lambda z (x^2 + y^2) \right\} \quad \text{Ec. 47}$$

Donde (x, y) son las coordenadas del plano a propagar, z es la distancia a propagar, λ es la longitud de onda.

A continuación se presentan algunos de los resultados computacionales encontrados usando la Ec. 46 y la Ec. 47:

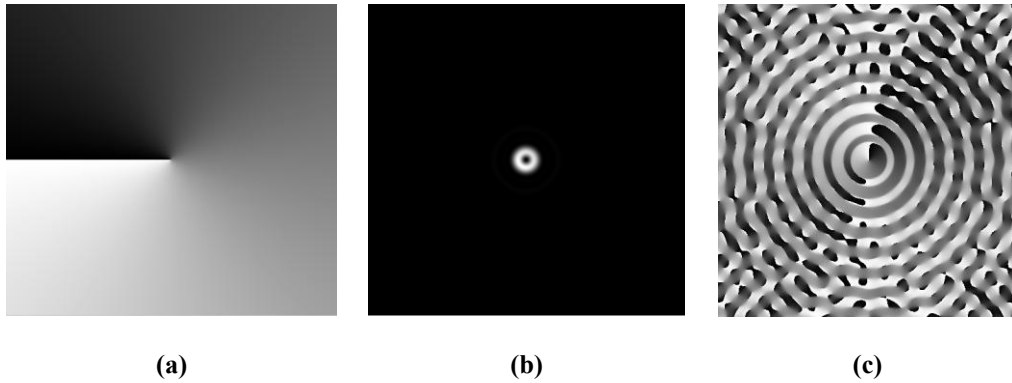


Figura 23. (a) Mascara de Fase con carga topológica $l = -1$. (b) Intensidad del plano de Fourier de la máscara de fase inicial (a). (c) Fase del plano de Fourier de la máscara de fase inicial (a).

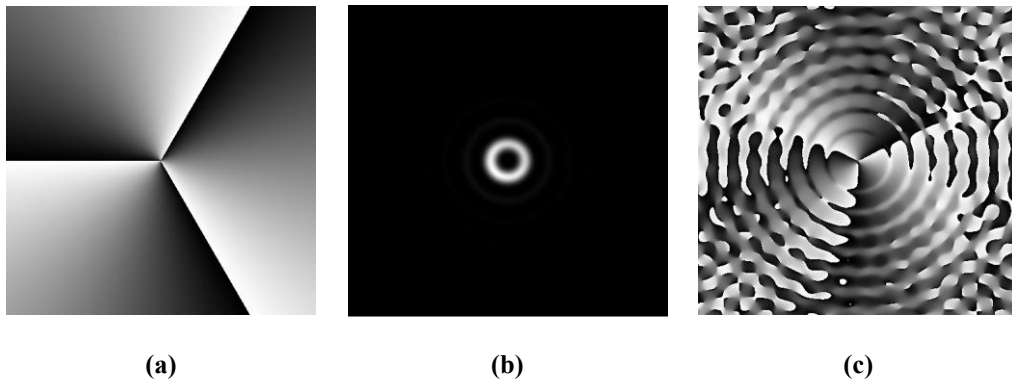


Figura 24. (a) Mascara de Fase con carga topológica $l = -3$. (b) Intensidad del plano de Fourier de la máscara de fase inicial (a). (c) Fase del plano de Fourier de la máscara de fase inicial (a).

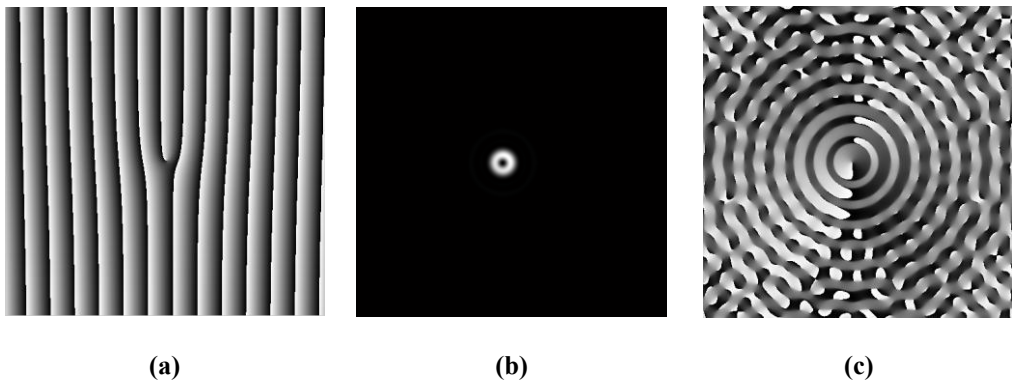


Figura 25. (a) Holograma con carga topológica $l = 1$. (b) Intensidad del plano de Fourier del Holograma inicial mostrado en (a). (c) Fase del plano de Fourier del Holograma inicial mostrado en (a).

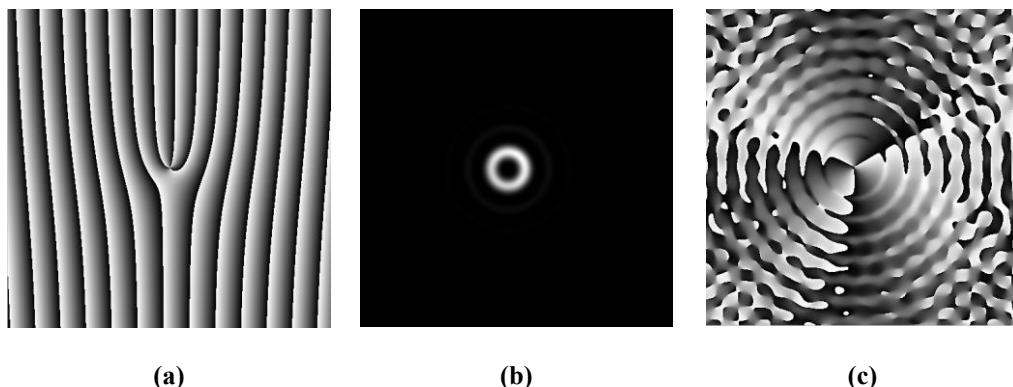


Figura 26. (a) Holograma con carga topológica $l = 3$. (b) Intensidad del plano de Fourier del Holograma inicial mostrado en (a). (c) Fase del plano de Fourier del Holograma inicial mostrado en (a).

De las Figuras anteriores se puede observar que el comportamiento del plano de Fourier, tanto el patrón de intensidad y la fase, de un vórtice óptico generado mediante la máscara de fase y el holograma para una misma carga topológica l , es el mismo. También se encuentra como para una carga topológica mayor el anillo luminoso generado en el plano de Fourier se hace mayor, como fue mencionado en el capítulo de la Descripción Teórica.

En los resultados mostrados para la Transformada Rápida de Fourier (Figura 23, Figura 24, Figura 25 y Figura 26) se ha utilizado una pupila para generar los vórtices; más adelante se expondrá la razón del uso de esta herramienta.

En las figuras anteriores vemos cómo se comporta el campo en el plano de Fourier, a continuación se muestran los resultados obtenidos para diferentes planos de la propagación a diferentes distancias, para vórtices ópticos generados utilizando una máscara de fase y un holograma *fork*. En la Figura 28 vemos como la fase del vórtice se propaga muy similar a la fase introducida por el holograma, esto quiere decir que en la propagación se guarda la información del holograma, tanto la forma de las ondas que interfirieron para su creación como el ángulo en el que lo hicieron.

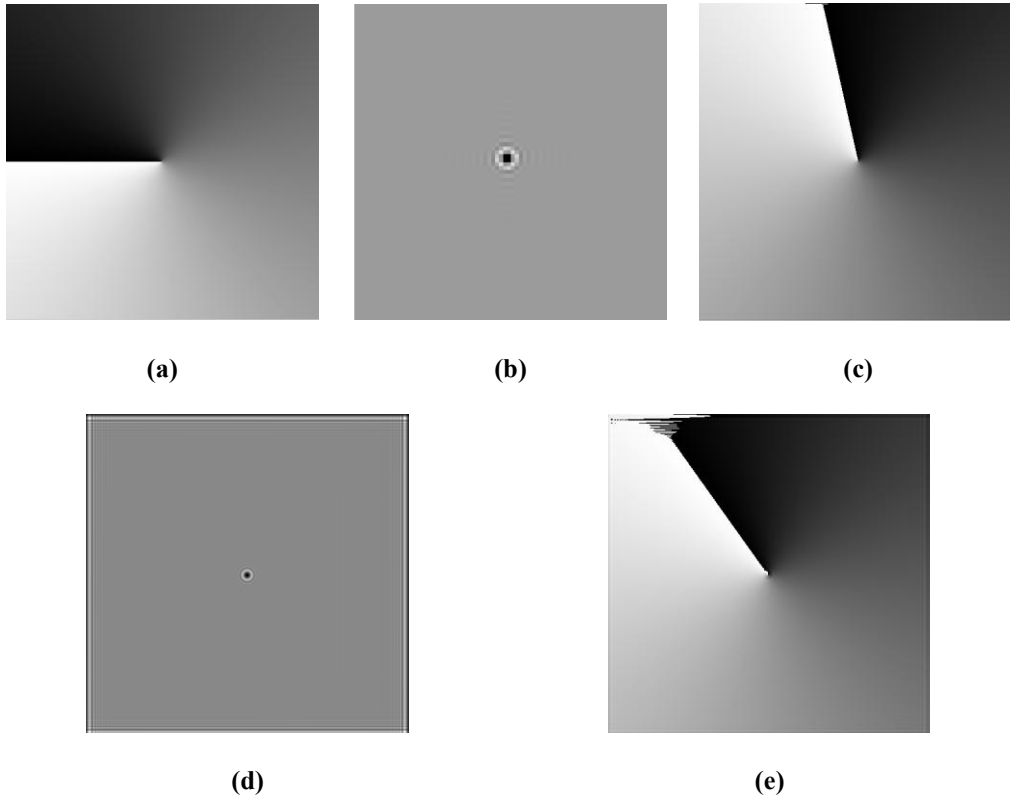


Figura 27. (a) Máscara de Fase con carga topológica $l = 1$. (b) Intensidad del plano de Propagación a $z = 10 \text{ mm}$ (ampliada a 300%) de la máscara de fase inicial mostrada en (a). (c) Fase del plano de Propagación a $z = 10 \text{ mm}$ de la máscara de fase inicial mostrada en (a). (d) Intensidad del plano de Propagación a $z = 100 \text{ mm}$ de la máscara de fase inicial mostrada en (a). (e) Fase del plano de Propagación a $z = 100 \text{ mm}$ de la máscara de fase inicial mostrada en (a).

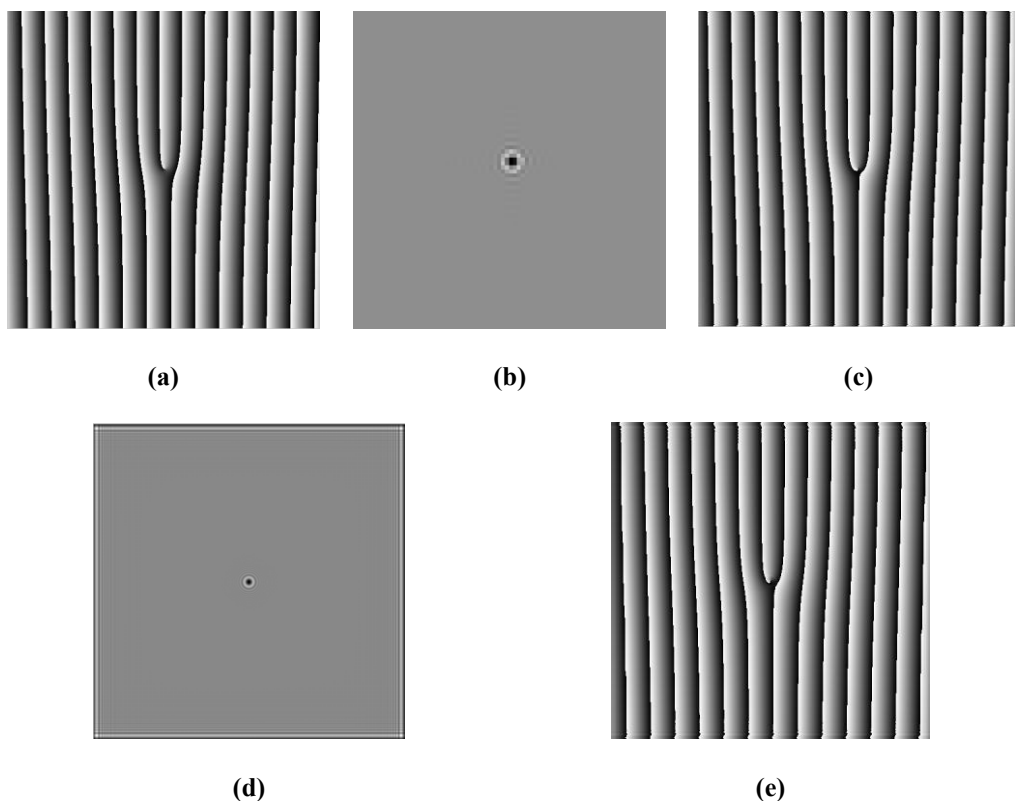


Figura 28. (a) Holograma con carga topológica $l = 1$. (b) Intensidad del plano de Propagación a $z = 10 \text{ mm}$ (ampliada a 300%) del holograma inicial mostrado en (a). (c) Fase del plano de Propagación a $z = 10 \text{ mm}$ del holograma inicial mostrado en (a). (d) Intensidad del plano de Propagación a $z = 100 \text{ mm}$ del holograma inicial mostrado en (a). (e) Fase del plano de Propagación a $z = 100 \text{ mm}$ del holograma inicial mostrado en (a).

Generación de Vórtices Ópticos Experimentales

Tomando los mismos parámetros para la generación de vórtices ópticos computacionales se desarrolló montaje experimental de la Figura 29, en el cual se usa como fuente de luz monocromática un Láser de Helio de 632.28 nm , un objetivo de microscopio de 10X para aumentar la luz emergente del láser y luego se colima con una lente y un diafragma. Para introducir el objeto óptico que genere el vórtice, ya sea la máscara de fase o el holograma, se utiliza un Modulador Espacial de Luz LC2002 de la compañía Holoeye (SLM por sus sigla en inglés: Spatial Light Modulator), previamente caracterizado en amplitud y fase (Ver Anexo). Para el funcionamiento de este último se necesitan de dos polarizadores uno antes y otro después del SLM en el

camino óptico, el primero se encarga de polarizar la luz necesaria para el funcionamiento del SLM y el segundo de analizar y seleccionar efectivamente la luz a la salida del SLM, por este motivo se llama Analizador. Para detectar las imágenes producidas se usa una cámara CCD Pulnix TM6703, la cual en su entrada tiene un objetivo de microscopio de 20X, con el fin de amplificar la imagen a observar. Se utilizó finalmente, una lente convergente dispuesta a una distancia focal del plano del SLM y a otra distancia focal de la CCD (Figura 29), con el fin de producir y observar el plano de Fourier generado por el objeto óptico dispuesto en el SLM.

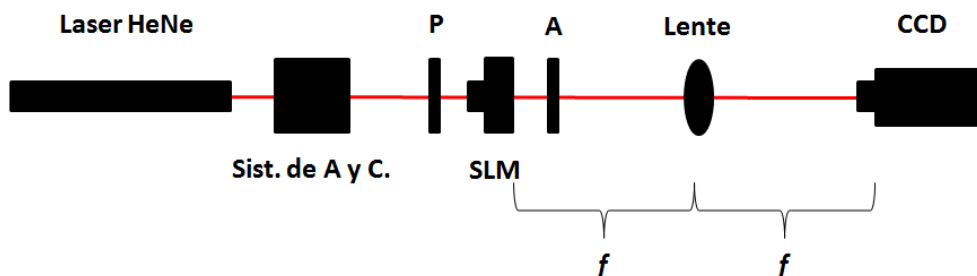


Figura 29. Montaje experimental para la generación de vórtices ópticos. Sist. de A y C: Sistema de amplificación y Colimación; P: Polarizador y A: Analizador.

Generación experimental usando la Máscara de Fase

Se dispone el montaje experimental mostrado en la Figura 29 para proyectar una máscara de fase que genere un vórtice con carga topológica $l = 1$, en el SLM. Sin embargo hay que tener en cuenta que este dispositivo no responde linealmente a lo que se quiere programar en él, primero que todo un nivel de gris asociado a un valor de la fase, que se proyecta en él no es necesariamente el que el SLM introduce al campo óptico incidente; seguido de que en un Modulador Espacial de Luz no se cuenta con un arreglo continuo de niveles de gris (0,255), sino que puede distinguir pocos niveles de manera efectiva. Estos dos problemas experimentales que introduce el uso del Modulador nos permiten entonces proyectar una máscara de fase como se muestra en la Figura 30.

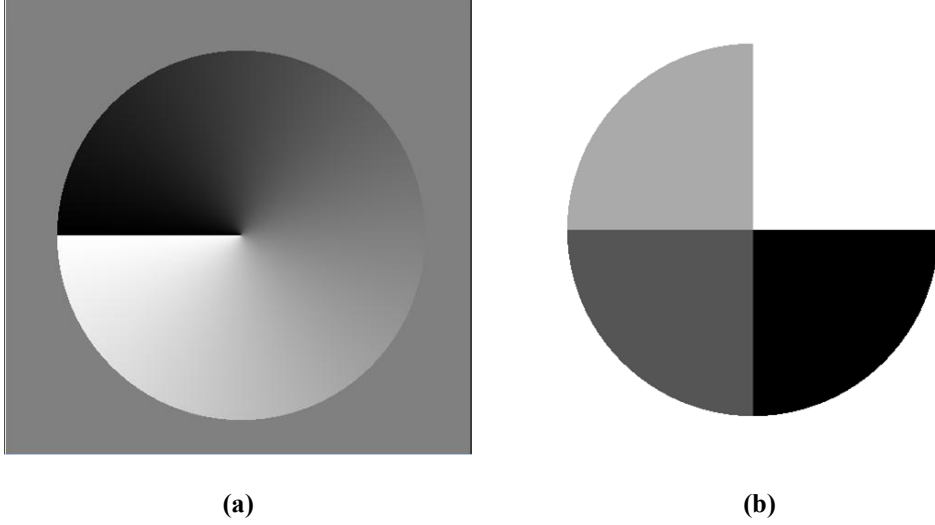


Figura 30. (a) Máscara de fase teórica para generar un vórtice óptico con carga topológica $l = 1$. (b) Máscara de fase equivalente a la mostrada en (a), que el SLM permite proyectar,

Para la máscara de fase mostrada en la Figura 30(b) se realizó una prueba computacional para observar premeditadamente que se debe de obtener en el plano de Fourier, los resultados fueron los siguientes:

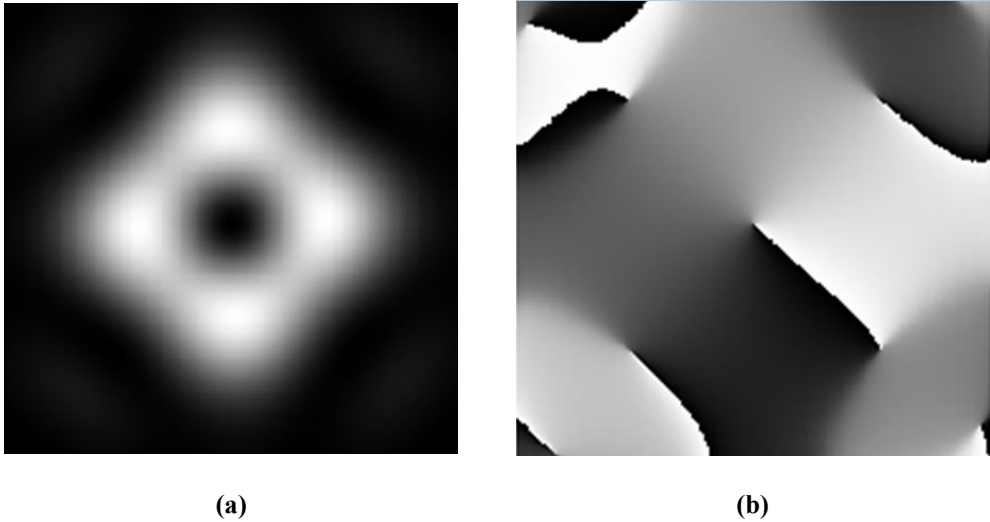


Figura 31. (a) Intensidad del plano de Fourier de la Máscara de fase mostrada en la Figura 30(b). (b) Fase del plano de Fourier de la Máscara de fase mostrada en la Figura 30(b).

Comparando los resultados de la Figura 31 con los teóricos mostrados anteriormente (Figura 23) nos damos cuenta que el error en la generación del vórtice introducido por el SLM acarrea serias dificultades. Este problema fue solucionado introduciendo una fase esférica convergente en la máscara de fase [15] es decir, multiplicando la Máscara de Fase teórica a propagar (Figura 30 (a)) por una Placa Zonal de Fresnel [16]. Luego el resultado es tratado con los niveles de gris (4) que el modulador puede distinguir (Figura 32). Realizando la misma prueba computacional realizada, para este caso se obtuvo que los problemas introducidos por la discretización del SLM, son reducidos, produciendo entonces, un buen patrón focal y así mismo, un vórtice óptico mejor estructurado (Figura 33).

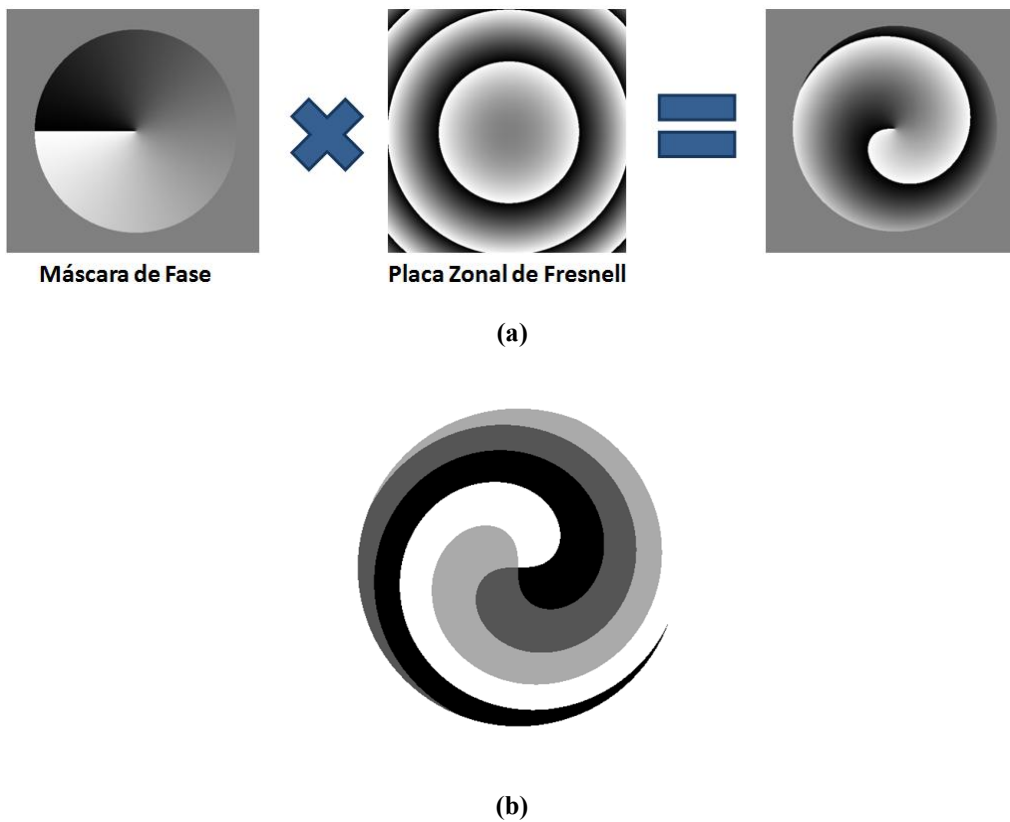


Figura 32. (a) Multiplicación de la Máscara de fase teórica con Placa Zonal de Fresnel. (b) Resultado de la multiplicación en 4 niveles de gris.

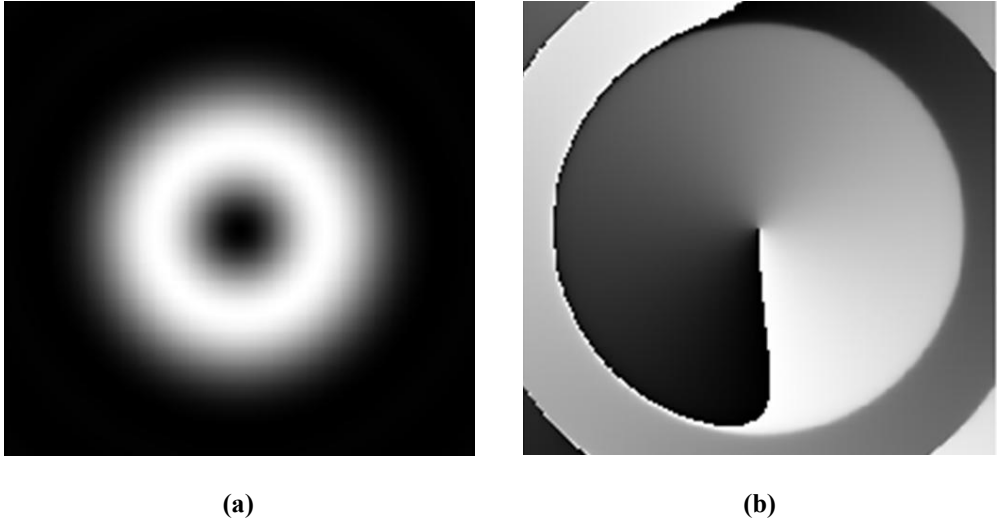


Figura 33. (a) Intensidad del plano de Fourier de la Máscara de fase multiplicada por la Placa Zonal de Fresnel mostrada en la Figura 32(b). (b) Fase del plano de Fourier de la Máscara de fase multiplicada por la Placa Zonal de Fresnel mostrada en la Figura 32(b).

Proyectando entonces, las mascararas de fase multiplicadas por Placas Zonales de Fresnel (MF+PF) en el SLM se obtuvieron los siguientes resultados:

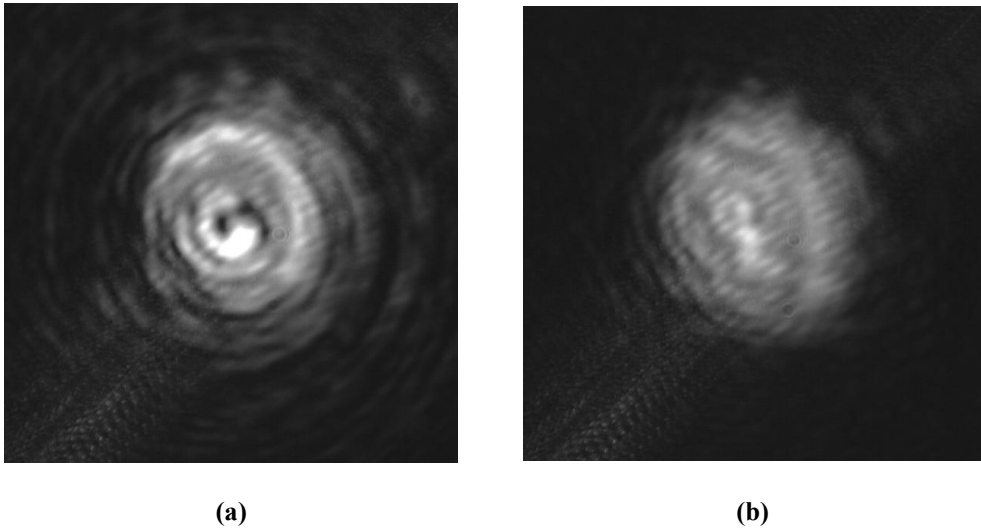


Figura 34. (a) Intensidad experimental del plano de Fourier de la Máscara de fase multiplicada por la Placa Zonal de Fresnel (Figura 32 (b)) proyectada en el SLM. (b) Intensidad experimental del plano de Fourier de la Máscara de fase (Figura 30(b)).

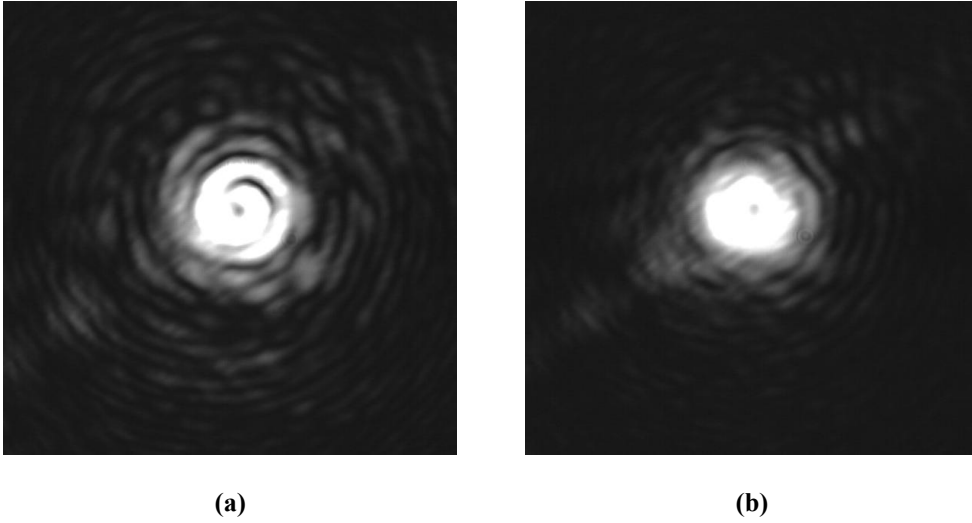


Figura 35. (a) Intensidad experimental del plano de Fourier de la Máscara de fase multiplicada por la Placa Zonal de Fresnel (Figura 32(b)) proyectada en el SLM. (b) Intensidad experimental del plano de Fourier de la Máscara de fase (Figura 30(b)).

De los resultados encontrados (Figura 34 y Figura 35) se puede observar como la Máscara de fase multiplicada por la Placa Zonal de Fresnel efectivamente genera un mejor vórtice, ya que produce un patrón de intensidad mejor definido. Sin embargo estos vórtices siguen presentando ruido y una estructura distorsionada, alejada de lo que se quiere obtener en principio (Figura 33(a)). Estos problemas se dan debido a una caracterización no tan buena del SLM y a una eficiencia baja de difracción respecto al campo incidente. En el trabajo presentado por E. Rueda *et al.* [15] los vórtices que fueron generados presentan una estructura más uniforme y acorde a lo esperado teóricamente (Figura 36).

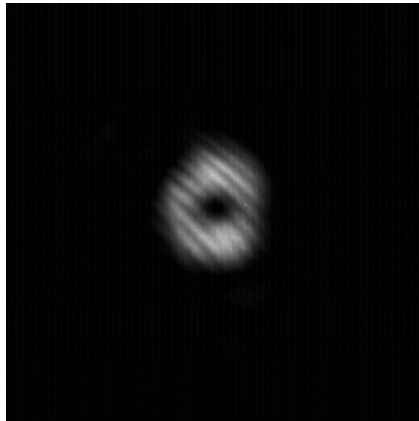


Figura 36. Vórtice generado experimentalmente mediante una MF+PF con carga topológica $l = 1$ por E. Rueda et al [15].

Generación experimental usando el Holograma *Fork*

Para la proyección del Holograma tipo *Fork* en el SLM, no aparece el problema de los pocos niveles de gris que distingue el modulador, puesto que para el holograma se puede disponer de una estructura binaria como se mencionó teóricamente (Ec. 37 y Ec. 38). Para este caso al usar un Holograma binario de carga topológica $l = 1$, se va a obtener un patrón de difracción similar al de una rejilla de difracción periódica [16] sino que en sus ordenes de difracción se obtendrán vórtices ópticos con carga topológica $l_n = n \cdot l$ donde n es el orden de difracción en el patrón de campo lejano observado.

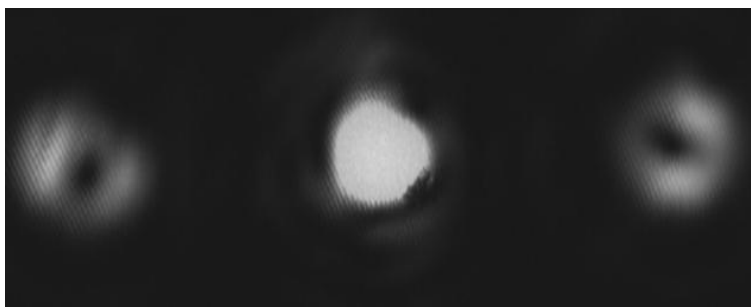


Figura 37. Patrón de difracción de campo lejano producido por un Holograma tipo Fork binario con carga topológica $l = 1$ (Figura 22(b)).

Observando el patrón de difracción (Figura 37) se puede notar que para la generación de vórtices ópticos usando un SLM es mucho más versátil el uso del Holograma *Fork* puesto que no se necesita de estrategias experimentales como la Placa Zonal de Fresnel usada con la Máscara de Fase, y el resultado obtenido es tan bueno o mejor como los del uso de la MF+PF (Figura 34, Figura 35 y Figura 36). Sin embargo, al tratarse de un objeto binario de amplitud y el vórtice deseado encontrarse en uno de los órdenes del patrón obtenido (está fuera del eje de propagación), la eficiencia de difracción es muy baja, lo que implica que la luz se concentra en el orden cero dejando poca intensidad para los órdenes mayores y así mismo para los patrones de intensidad que se buscan construir.

A continuación se muestran algunos otros vórtices generados en el orden uno de difracción del Holograma (Figura 38). De igual forma fueron generados vórtices ópticos usando esta técnica para carga topológica fraccional, sin embargo las imágenes tomadas no tenían una forma regular pero se alcanzaba a observar un resultado como el obtenido por Jonathan Leach *et al.* [17] (Figura 39), en el cual esta presenta la línea de oscuridad sobre $\varphi = 0$ predicha por Berry [13],

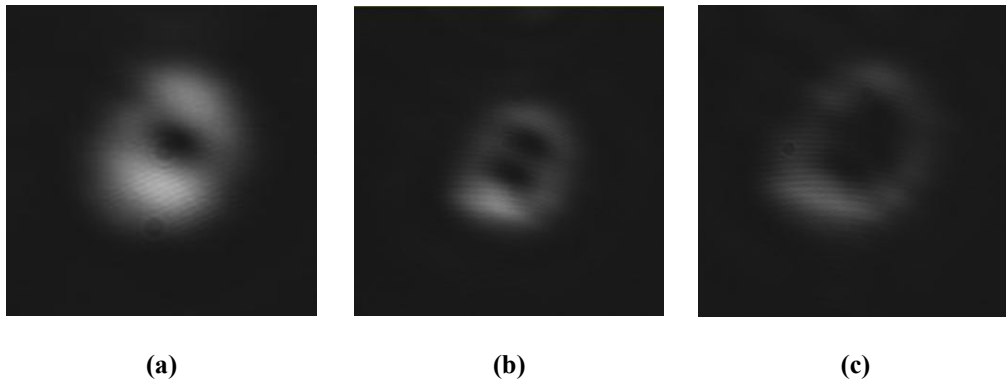


Figura 38. Intensidad del orden 1 del patrón de difracción producido por un Holograma Fork binario para una carga topología: (a) $l = 1$. (b) $l = 2$. (c) $l = 3$.

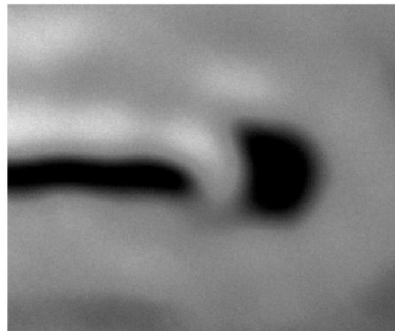


Figura 39. Patrón de intensidad obtenido por Jonathan Leach et al. mediante un Holograma Fork con carga topológica $l = 2.5$ [17].

Generación experimental usando el Holograma *Fork* Impreso

Además de usar el Holograma *Fork* proyectándolo en el SLM en el montaje experimental mostrado en la Figura 29, también se realizaron pruebas experimentales de la generación de vórtices ópticos con un Holograma impreso en un acetato. Se grabó el Holograma *Fork* en un acetato transparente mediante una impresora de 1200DPI (puntos por pulgada) y puesto en el camino óptico en lugar del sistema de modulación (P, SLM, A en Figura 29) para mejorar la difracción y así la estructura del vórtice en el patrón de campo lejano, se utilizó un diafragma que servía de pupila de entrada al plano del Holograma (Figura 40), como se hizo para la Generación de Vórtices Computacionales usando la Máscara de Fase.

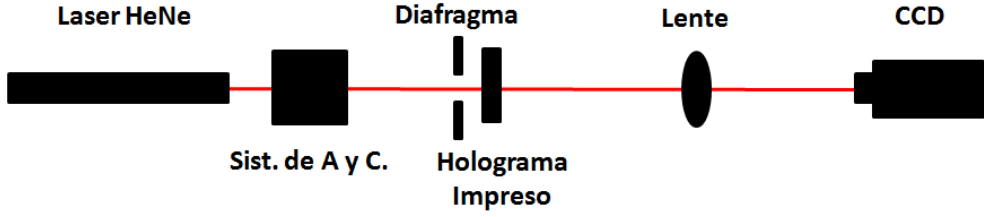


Figura 40. Montaje experimental para la generación de vórtices ópticos usando un Holograma *Fork* impreso en un acetato.

Con este método los vórtices generados presentaron una mejor estructura, como se observó en su patrón de intensidad del campo lejano (Figura 41). Debido a que el área de contacto de la luz incidente en el holograma fue mayor que el área de contacto en el SLM además de que los bordes de las franjas del Holograma presentaban mayor definición y el grosor del mismo era mucho menor que cuando se proyectaba en la pantalla del SLM. Usando esta técnica se generaron vórtices con carga topológica fraccional y los resultados conseguidos estaban en total concordancia con lo esperado de las simulaciones (Figura 42).

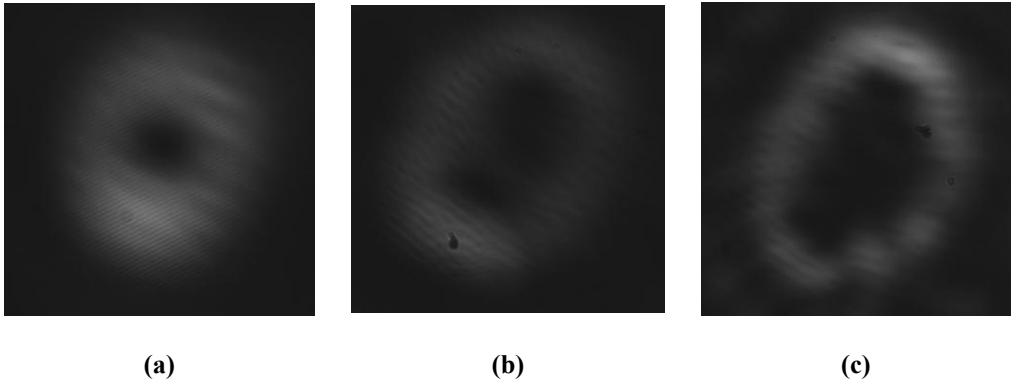


Figura 41. Vórtices Ópticos experimentales generados con un Holograma *Fork* impreso con carga topológica. (a) $l = 1$. (b) $l = 3$. (c) $l = 6$.

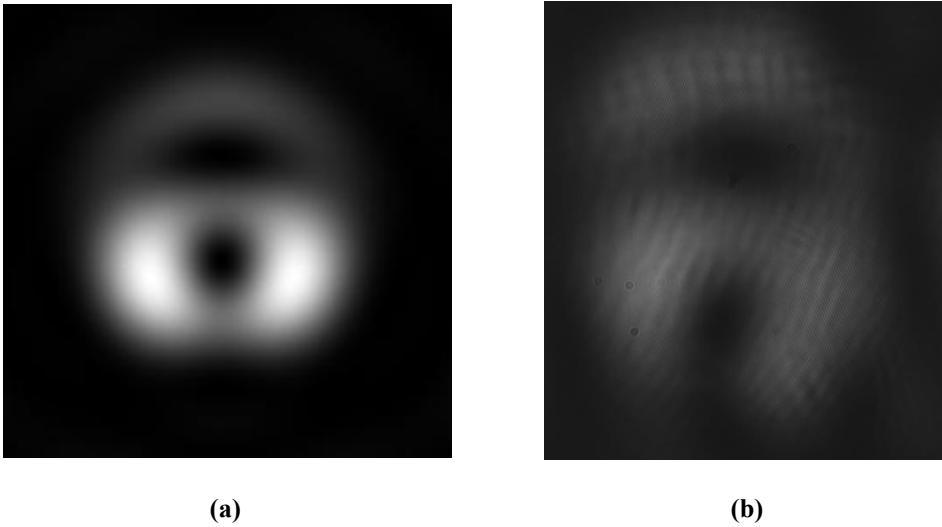


Figura 42. (a) Intensidad del plano de Fourier para un vórtice óptico computacional con carga topológica $l = 1.5$. (b) Intensidad experimental del plano de Fourier para un vórtice óptico con carga topológica $l = 1.5$.

Uso de pupilas para la generación de Vórtices Ópticos

Al generar vórtices ópticos mediante la incidencia de luz plana sobre una máscara de fase se encuentra que si ésta es del tamaño de la luz incidente, al propagarse la luz se obtiene mucho ruido y luz que no se desea, ya que se quiere obtener solo el patrón de intensidad anular (Figura 33 (a) y Figura 36). Estos resultados pueden observarse en la Figura 45 para una propagación de 10 mm . Buscando corregir este problema se implementó el algoritmo *centradomat.m* en la plataforma Matlab, el cual toma una matriz pequeña y la ‘fusiona’ a otra más grande o toma un pedazo de una matriz y la ubica encima de otra matriz mayor. Esta primera solución se desarrolló buscando hacer que la luz que llega a la máscara de fase sea solo una parte del centro del frente de onda que se está utilizando (Figura 43 (a)) pero debido a los bordes cuadrados de la nueva máscara que se dispone a propagar, en la difracción obtenida ha menguado ruido pero se obtiene un patrón de difracción de campo lejano que es la dona (Figura 33 (a)) junto con el patrón de difracción de una abertura cuadrada [16]. Así que se planeó usar una abertura circular con la ayuda de la función interna de Matlab *fspecial(disk)*, con esta solo se deja pasar una sección circular de la máscara de fase que queremos estudiar multiplicando la matriz por nuestra abertura (Figura 43 (b)).

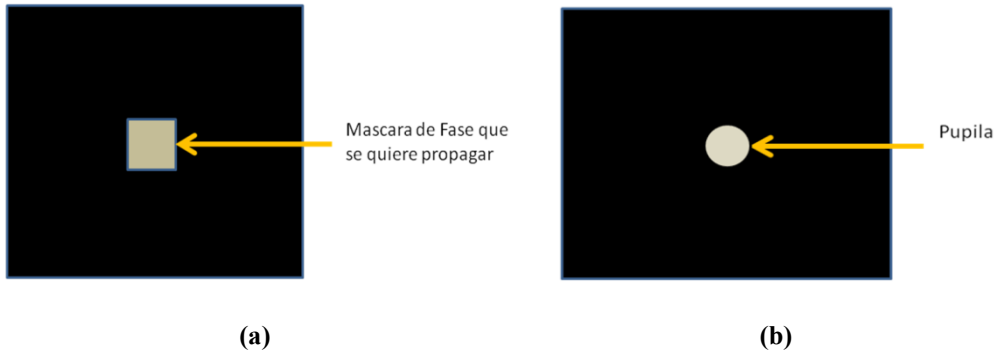


Figura 43. (a) Máscara de fase centrada en una matriz mayor. (b) Pupila circular.

Se genero una máscara de fase para generar luz con momento angular de cinco ($l = 5$). Se incide sobre ella una onda plana y luego se propaga. Los resultados (tanto para la fase como para la intensidad) de la propagación con pupila y sin pupila fueron:

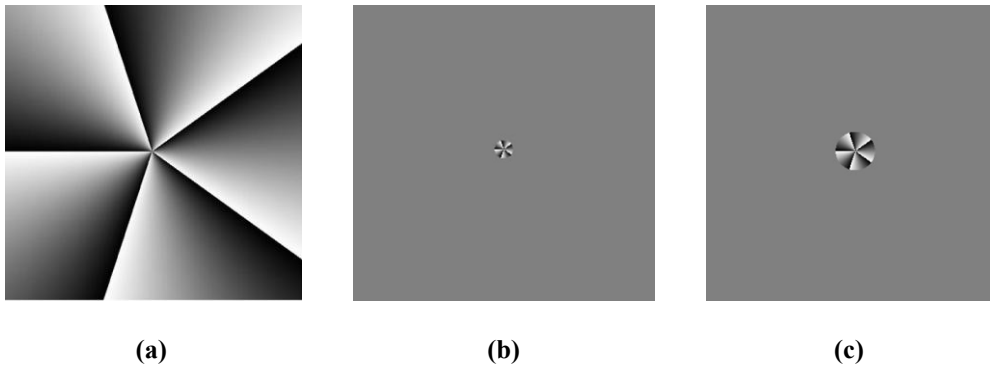


Figura 44. (a) Máscara de Fase de carga topológica $l = 5$. (b) Máscara de Fase de (a) multiplicada por una pupila de 40 pixeles. (c) Máscara de Fase de (a) multiplicada por una pupila de 100 pixeles.

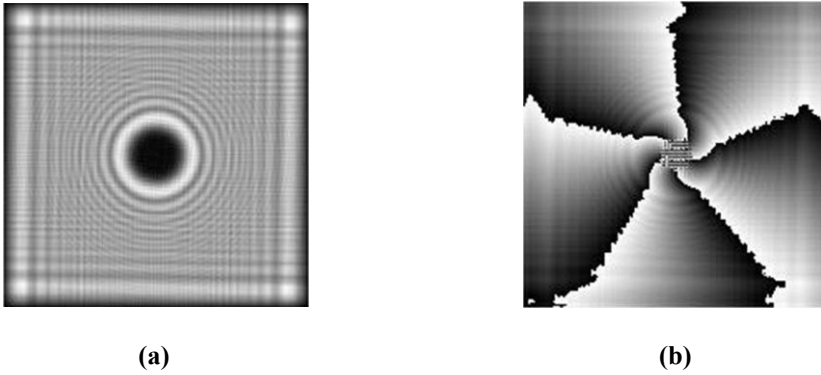


Figura 45. Plano de la propagación ($z = 10mm$) de la luz emergente de la máscara de fase mostrada en la Figura 44(a), (a) Intensidad. (b) Fase.



Figura 46. Plano Fourier de la luz emergente de la máscara de fase mostrada en la Figura 44(a), (a) Intensidad. (b) Fase.

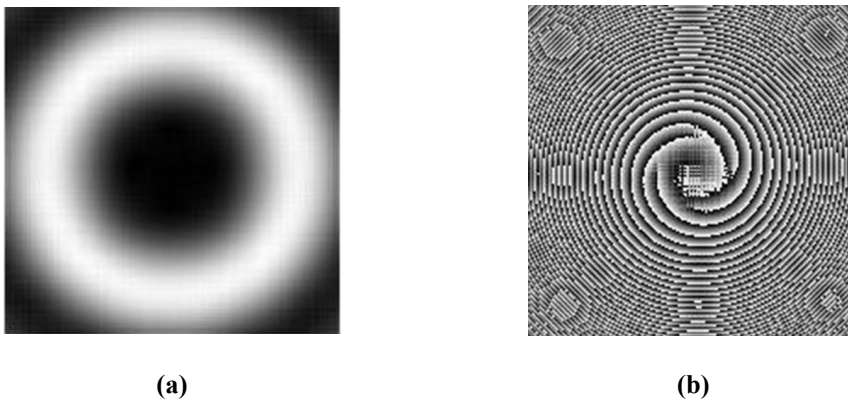
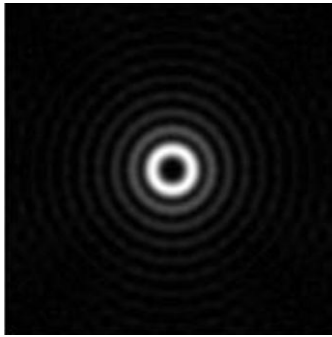
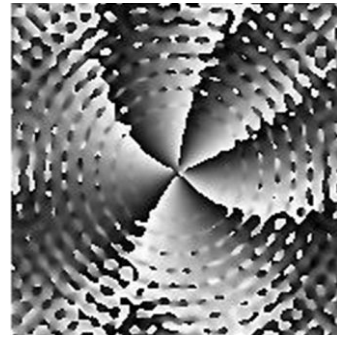


Figura 47. Plano de la propagación ($z = 10mm$) de la luz emergente de la máscara de fase mostrada en la Figura 44(b), (a) Intensidad. (b) Fase.

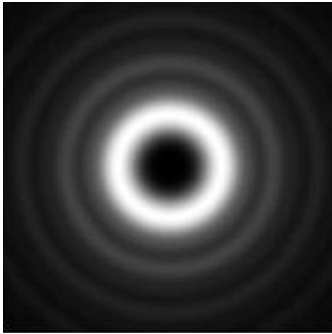


(a)

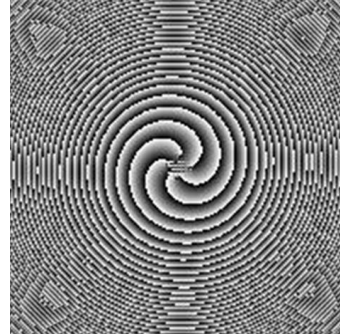


(b)

Figura 48. Plano Fourier de la luz emergente de la máscara de fase mostrada en la Figura 44(b). (a) Intensidad. (b) Fase.

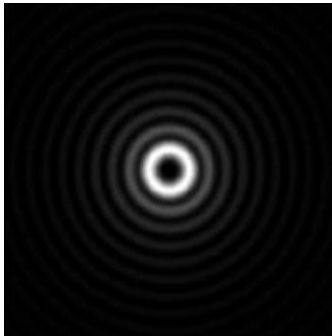


(a)

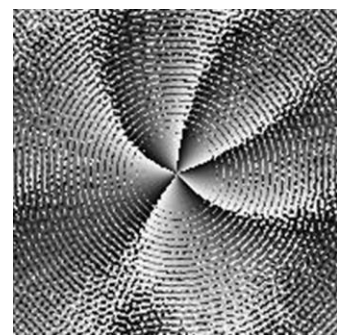


(b)

Figura 49. Plano de la propagación ($z = 10mm$) de la luz emergente de la máscara de fase mostrada en la Figura 44(b), (a) Intensidad. (b) Fase.



(a)



(b)

Figura 50. Plano Fourier de la luz emergente de la máscara de fase mostrada en la Figura 44(b), (a) Intensidad. (b) Fase.

Observando los resultados computacionales respecto al uso de pupilas para la generación de vórtices ópticos (Figura 44 - Figura 50) se nota que definitivamente el uso de la pupila es más que necesario para eliminar ruido y luz que no queremos obtener en el patrón de intensidad de campo lejano. Sin embargo, la pupila deforma la información de la fase para valores de r mayores al radio de la pupila en el plano transversal de observación. La desformación de la fase se debe a la convolución del vórtice óptico con la pupila que da lugar a la aparición de un patrón de Airy [10].

En estas pruebas computacionales de la propagación de la luz emergente de una máscara de fase de 1000×1000 píxeles multiplicada por una pupila se obtuvo que los mejores resultados, hablando de la generación de un buen patrón de intensidad, fueron para pupilas de 100 píxeles de diámetro; puesto que las de diámetro más grande aparece un poco de esa luz que se busca eliminar desde el principio y para diámetros más pequeños se obtenía ya mucha difracción que terminaba produciendo ruido en nuestro patrón. En la primera se puede decir que las pupilas que pueden arrojar un mejor resultado son las que tengan un diámetro de alrededor del 10% del tamaño de la matriz con la que se está trabajando. Y en el campo experimental, la pupila que mejores resultados producirá es la que tenga también, el 10% del tamaño del objeto generador del vórtice (máscara de fase u Holograma *Fork*).

Por otro lado, qué pasara con los vórtices generados a partir de máscaras de fase con y sin pupila, para cargas fraccionarias, en cuanto a la línea de oscuridad que aparece con la propagación de la luz emergente (Figura 15 y Figura 16b). Primero realizaremos una comparación directa entre una máscara de fase sin y con pupila con carga topológica entera ($l = 1$).

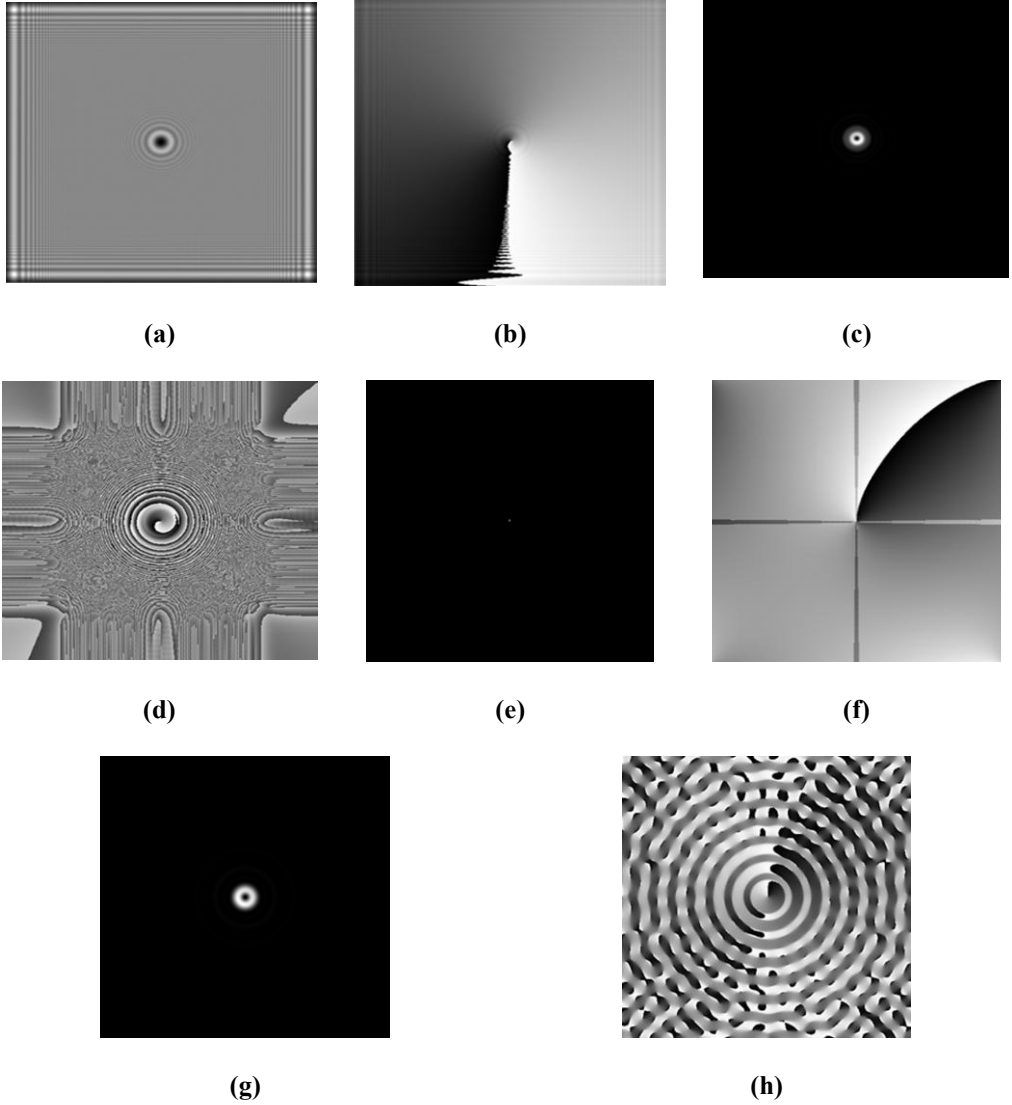


Figura 51. Resultados usando una máscara de fase con pupila (MFC) y sin pupila (MFS), (a) Intensidad de la propagación (500 mm) de MFS con carga topológica ($l = 1$). (b) Fase de de la propagación (500 mm) de MFS. (c) Intensidad de la propagación (500 mm) de MFC. (d) Fase de de la propagación (500 mm) de MFC. (e) Intensidad de la Transformada de Fourier de MFS. (f) Fase de de la Transformada de Fourier de MFS. (g) Intensidad de la Transformada de Fourier de MFC. (h) Fase de Transformada de Fourier de MFC.

En la Figura 51 se nota el cambio del patrón del plano observado al usar pupila sobre la máscara de fase. Se nota el cambio en la fase y la mejor estructura de la intensidad para el caso del uso de la pupila, como se había mencionado. Ahora para una carga $l = 1,4$ y $l = 2,5$, los resultados son:

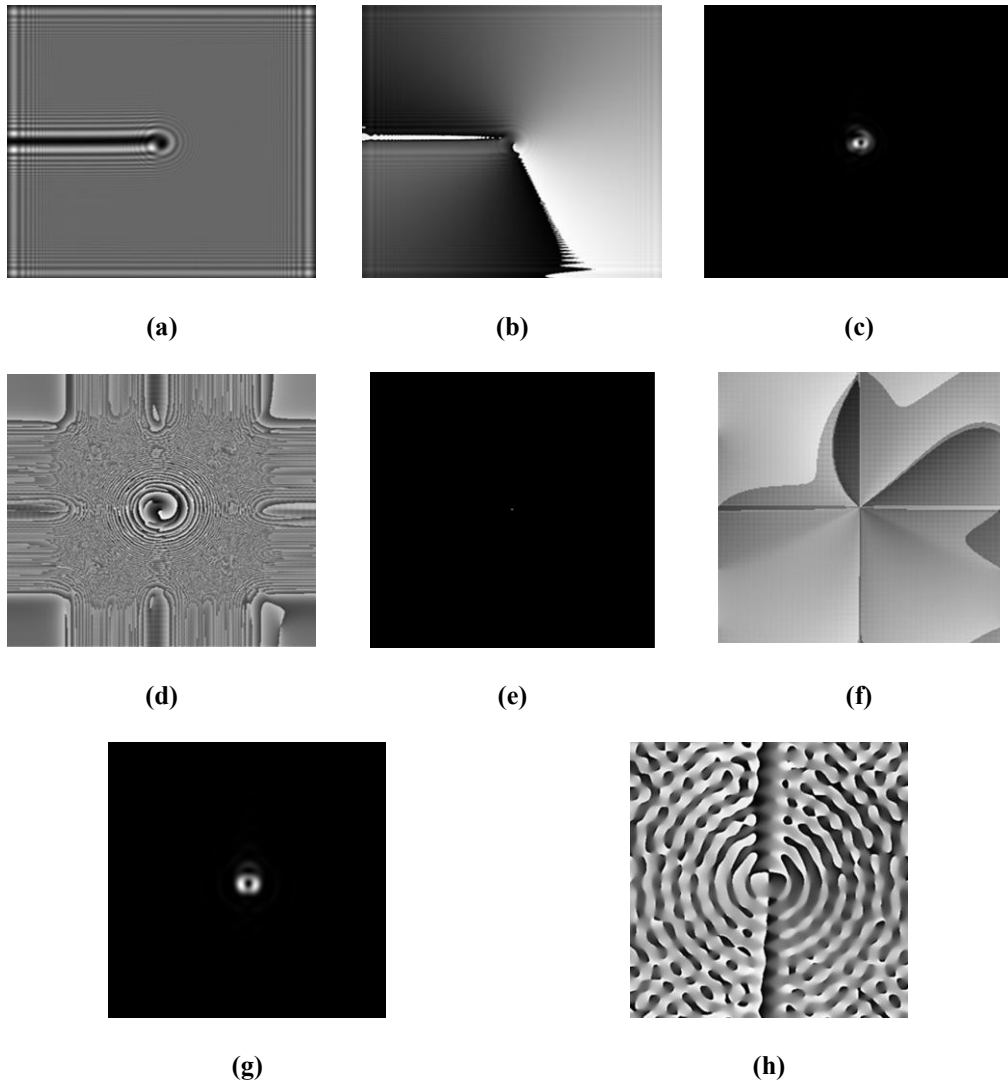


Figura 52. Resultados usando una máscara de fase con pupila (MFC) y sin pupila (MFS) con carga topológica $l = 1,4$. (a) Intensidad de la propagación (500 mm) de MFS. (b) Fase de de la propagación (500 mm) de MFS. (c) Intensidad de la propagación (500 mm) de MFC. (d) Fase de de la propagación (500 mm) de MFC. (e) Intensidad de la Transformada de Fourier de MFS. (f) Fase de de la Transformada de Fourier de MFS. (g) Intensidad de la Transformada de Fourier de MFC. (h) Fase de Transformada de Fourier de MFC.

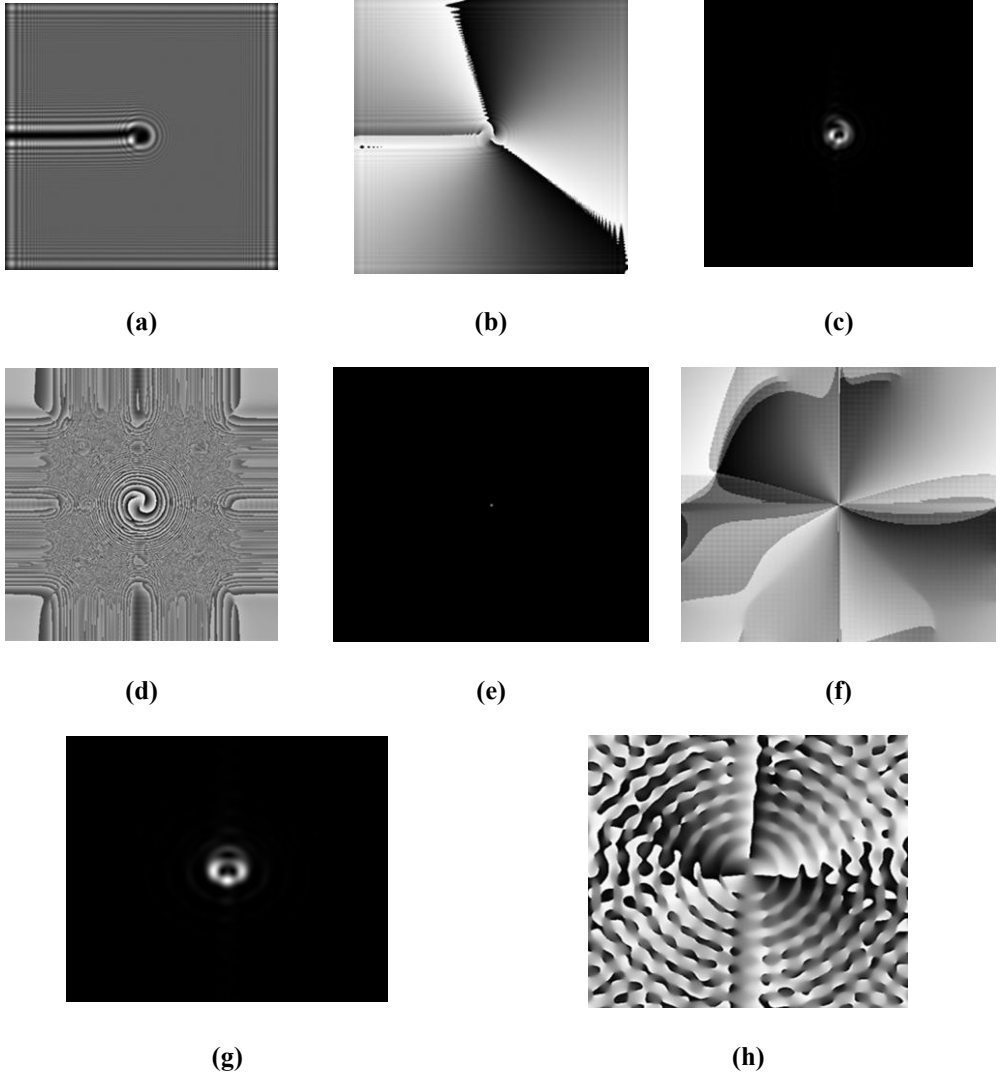


Figura 53. Resultados usando una máscara de fase con pupila (MFC) y sin pupila (MFS) con carga topológica $l = 2,5$. (a) Intensidad de la propagación (500 mm) de MFS. (b) Fase de de la propagación (500 mm) de MFS. (c) Intensidad de la propagación (500 mm) de MFC. (d) Fase de de la propagación (500 mm) de MFC. (e) Intensidad de la Transformada de Fourier de MFS. (f) Fase de de la Transformada de Fourier de MFS. (g) Intensidad de la Transformada de Fourier de MFC. (h) Fase de Transformada de Fourier de MFC.

Para la propagación de la luz emergente de una máscara de fase (u Holograma) con carga topológica fraccionaria se observa que si no se utiliza la pupila, aparece la información de la línea de oscuridad predicha por Berry [13] (Ec. 35 y Figura 15), así que para estudiar la propagación de vórtices ópticos con carga fraccionaria no se debe de usar la pupila, para que los resultados estén de acuerdo con la teoría. Por otro lado,

note que los patrones de intensidad del plano de Fourier para cargas fraccionarias no presentan esta línea de oscuridad, con o sin el uso de la pupila, por tanto es conveniente usar la pupila, para asegurar mejor difracción y así que el patrón de intensidad presente una mejor estructura. Además de que el patrón del plano de Fourier es el mismo en los dos casos, sino que para la máscara de fase sin pupila el tamaño es menor que para la máscara de fase con la pupila.

Caracterización de Vórtices Ópticos

La fase elemental para la propagación de un vórtice óptico en el espacio está dada por la Ec. 8 la cual tiene una dependencia del ángulo acimutal φ , y de una constante l conocida como la carga topológica. Caracterizar un vórtice óptico significa conocer qué tipo de condiciones físicas lo produjo. Como la fase y la amplitud del campo óptico que transporta esta información, se propaga para valores del ángulo acimutal $(0, 2\pi)$ del plano transversal, basta solo con conocer la carga topológica para poder determinar las características de generación y propagación del vórtice. Esta caracterización solo se desarrolla para vórtices experimentales ya que es en la naturaleza donde aparecen vórtices que no se conoce su procedencia [18]. Para determinar el valor de la carga se utilizaron dos métodos diferentes: el método Denisenko [19] y el método Prabhakar [20].

Método Denisenko para caracterizar vórtices ópticos

Se expondrá el método de forma cualitativa. Para entender el desarrollo matemático a fondo el mismo se recomienda ir directamente al artículo [19]. El esquema experimental usado para el método es el que se muestra en la Figura 54, se dispone de un Interferómetro de Mach-Zehnder [21] por el cual, en uno de sus brazos, se pone en el camino óptico el objeto al cual se quiere determinar la fase (Muestra).

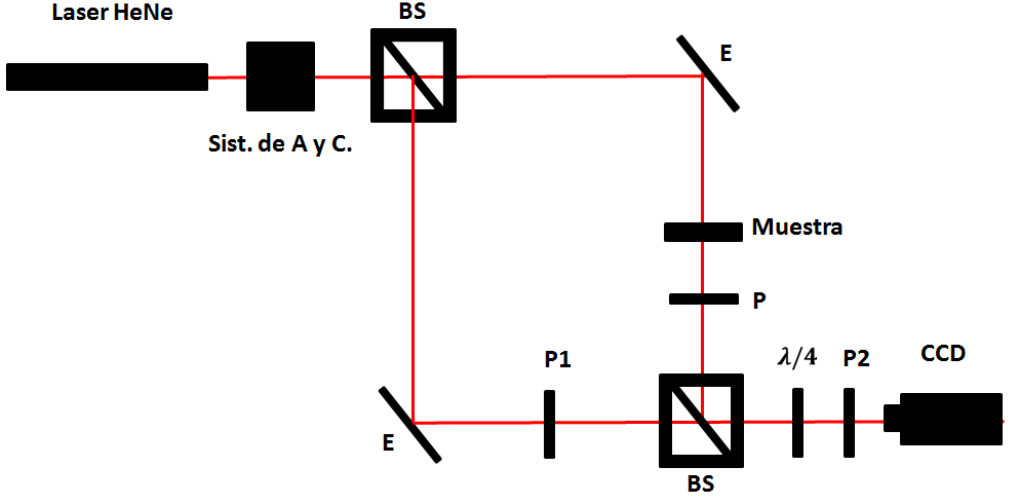


Figura 54. Montaje experimental para el método de Denisenko. Sist. de A. y C.: Sistema de Colimación y Amplificación, BS: Beam Splitter, E: Espejo plano, P-P1-P2: Polarizador, $\lambda/4$: Lámina de cuarto de onda.

En el método de Denisenko se construye una base ortogonal de estados de polarización del campo eléctrico del haz a partir de los polarizadores P y P1:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\phi_1 + \omega t) \\ E_y &= A_y \cos(\phi_2 + \omega t) \end{aligned} \quad \text{Ec. 48}$$

A partir de estos estados de polarización se pueden construir los parámetros de Stokes [10] dados por:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_x^2 + A_y^2 \\ S_1 &= A_x^2 - A_y^2 \\ S_2 &= 2A_x A_y \cos \delta \\ S_3 &= 2A_x A_y \sin \delta \end{aligned} \quad \text{Ec. 49}$$

Donde $\delta = \phi_1 - \phi_2$, Si se conoce la fase de una onda de referencia podemos entonces describir la fase de la onda que atraviesa la muestra.

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{S_3}{S_2} \right) \quad \text{Ec. 50}$$

El método consiste en encontrar los parámetros de Stokes S_2 y S_3 a partir de la onda de referencia que pasa por el polarizador P1 y la onda que atraviesa el polarizador P

(Figura 54) y que transporta la fase que se desea determinar, en nuestro caso, el vórtice óptico. Los parámetros de Stokes se miden a partir de los patrones de intensidad detectados en la CCD para varias posiciones de la lámina de cuarto de onda ($\lambda/4$) y el Polarizador P2 (Figura 54).

$$\begin{aligned} S_2 &= I(45^\circ, 45^\circ) - I(135^\circ, 135^\circ) \\ S_3 &= I(45^\circ, 0^\circ) - I(135^\circ, 0^\circ) \end{aligned} \quad \text{Ec. 51}$$

Donde $I(\alpha, \beta)$ es el patrón de intensidad detectado para la configuración del ángulo α del polarizador P2 y β de la lámina de cuarto de onda. A continuación se muestran las imágenes de la detección de la fase de un vórtice óptico (Figura 36) usando este método.

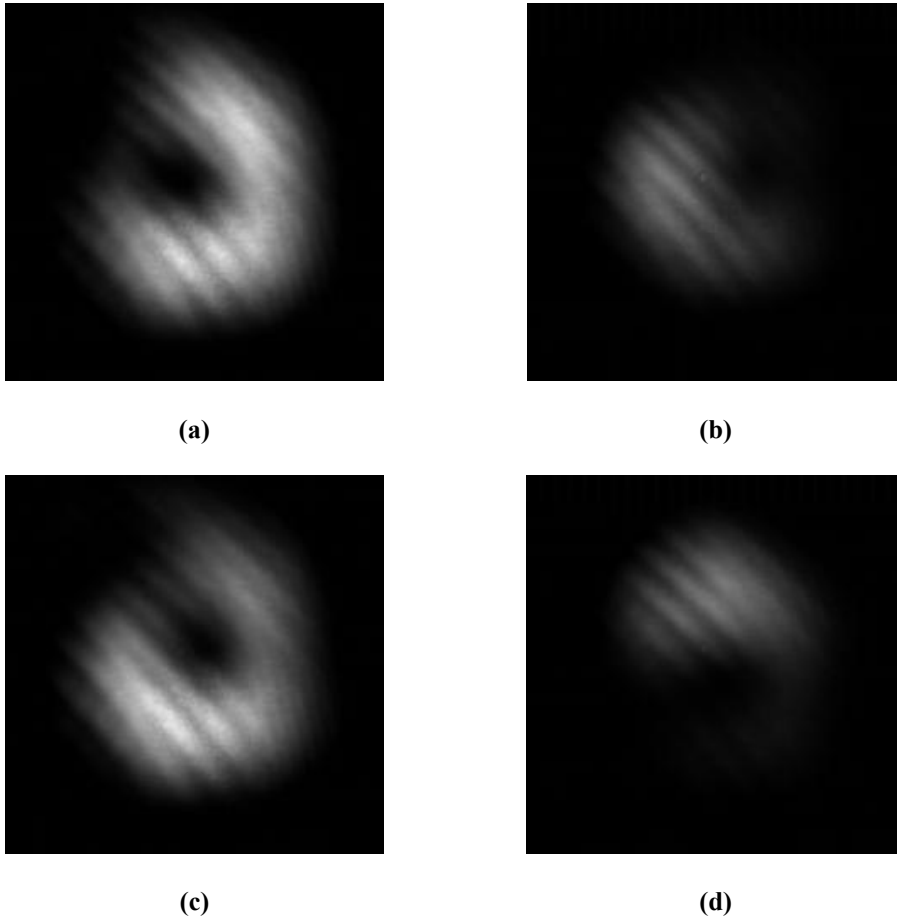


Figura 55. Detección del patrón de intensidad para usar el método de caracterización de Denisenko. (a) $I(45^\circ, 45^\circ)$. (b) $I(135^\circ, 135^\circ)$. (c) $I(45^\circ, 0^\circ)$. (d) $I(135^\circ, 0^\circ)$.

La resta de las imágenes para la determinación de los parámetros de Stokes (Ec. 51) se realiza computacionalmente y a partir de estas se procede a hacer el cociente $\left(\frac{S_3}{S_2}\right)$ punto a punto (con cada entrada de las matrices S_2 y S_3) y luego se usa el comando computacional *atan2* para obtener la tangente inversa del cociente anterior y así construir la fase que se desea determinar (Figura 56).

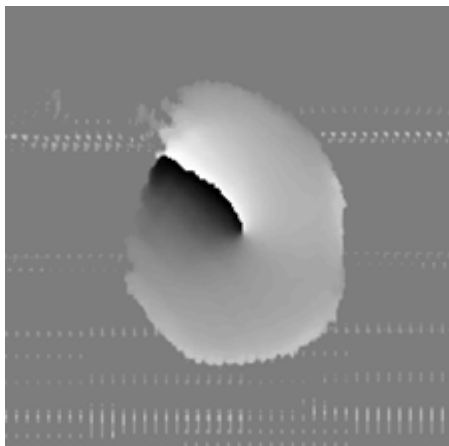


Figura 56. Fase de un vórtice óptico de la Figura 36 obtenida mediante el método de caracterización de Denisenko.

En la Figura 56 se puede identificar el salto de fase de 0 a 2π barriando todos los niveles de gris, es decir se pudo determinar la estructura de la fase asociada al vórtice óptico generado, y que es similar a lo esperado teóricamente y obtenido computacionalmente (Figura 23 (c) -Parte central-).

Método Prabhakar para caracterizar vórtices ópticos

El método de caracterización de Prabhakar [20] se puede decir que es más sencillo de implementar que el de Denisenko, puesto que es un método puramente computacional, no necesita de hacer medidas sobre el vórtice fuera de la detección del patrón de intensidad del campo lejano producido en la generación del mismo. Usando el montaje experimental para la generación de vórtices ópticos con cualquier herramienta dispuesta (Máscara de fase u Holograma *Fork*, Figura 29 y Figura 40), se detecta el patrón de intensidad en el plano de Fourier. Luego, se obtiene la Transformada de Fourier computacional del patrón detectado, tomando en cuenta que ésta es solo de la intensidad sin tener información de la fase. Generando el modulo de este nuevo patrón de campo lejano se obtiene un arreglo de círculos concéntricos

luminosos y oscuros (Figura 57), que es un patrón de Laguerre-Gauss, los ceros de intensidad obtenidos, es decir la cantidad de círculos oscuros encontrados, se relacionan con la carga topológica del vórtice generado.

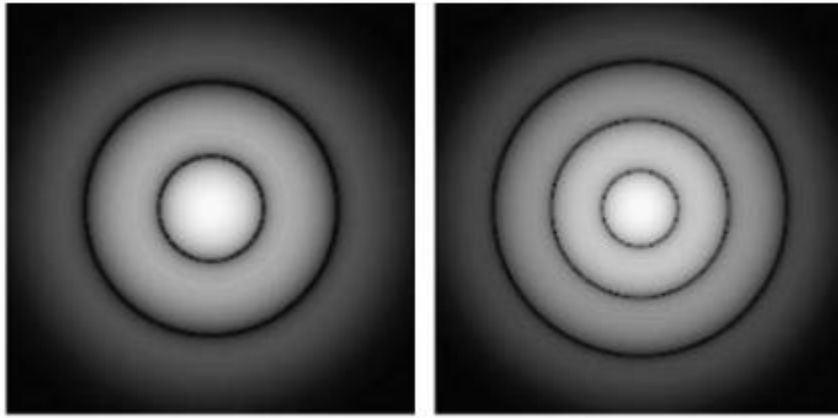


Figura 57. Patrón de intensidad de la Transformada de Fourier del patrón de intensidad del plano de Fourier de un vórtice óptico (Figura extraída de [20]).

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la caracterización de vórtices ópticos computacionales y experimentales:

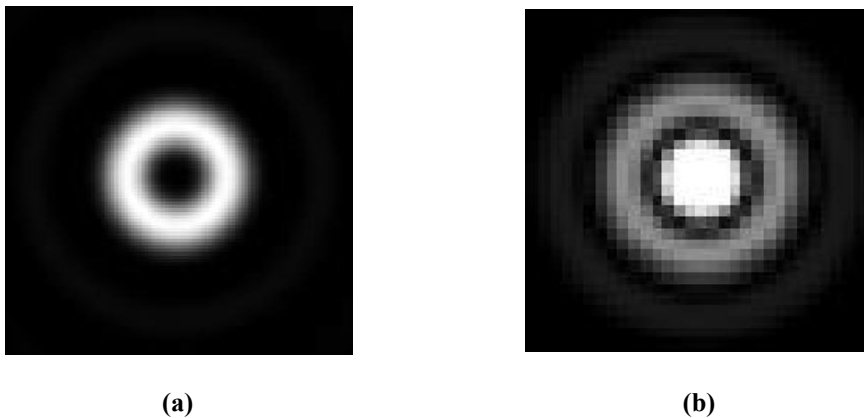


Figura 58. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico computacional de carga topológica $l = 2$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

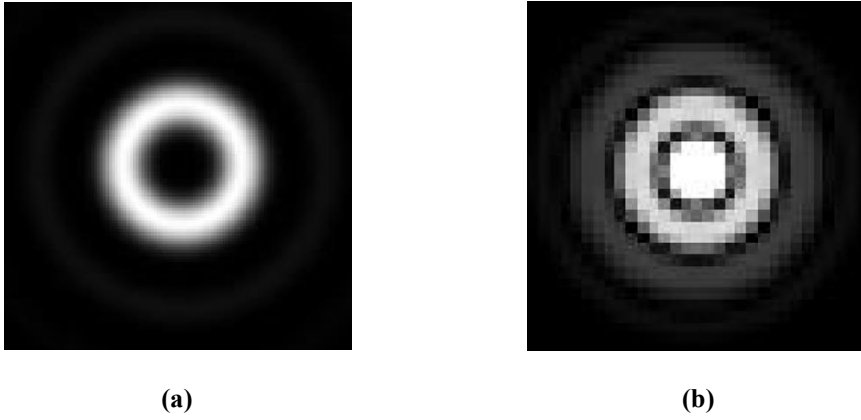


Figura 59. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico computacional de carga topológica $l = 3$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

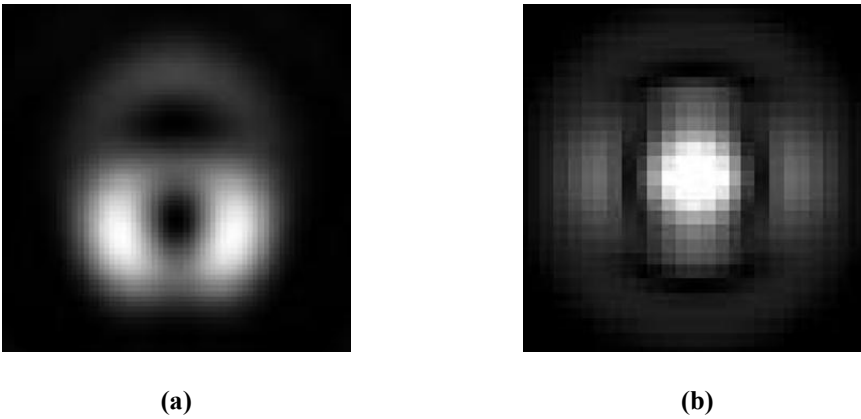


Figura 60. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico computacional de carga topológica $l = 1,5$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

De la Figura 58 y de la Figura 59 se puede observar el potencial del método para encontrar el valor de la carga topológica del vórtice estudiado. Sin embargo para cargas topológicas fraccionarias el método pierde su infalibilidad puesto que los resultados pueden ser confusos (Figura 60), mas cuando los vórtices estudiados son generados experimentalmente, como se mostrará a continuación.

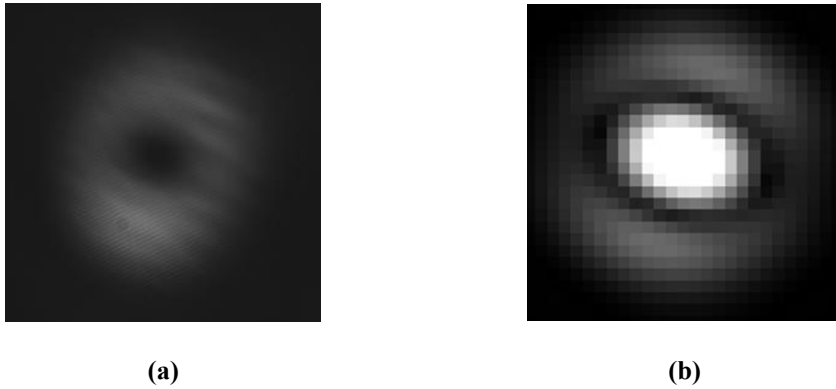


Figura 61. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico experimental de carga topológica $l = 1$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

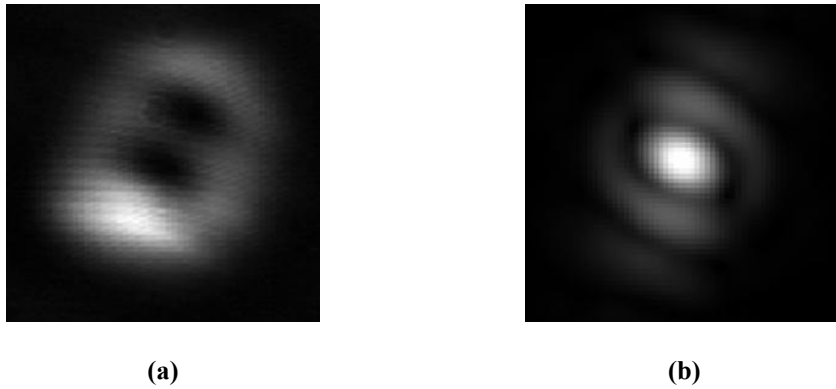


Figura 62. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico experimental de carga topológica $l = 2$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).



Figura 63. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico experimental de carga topológica $l = 3$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

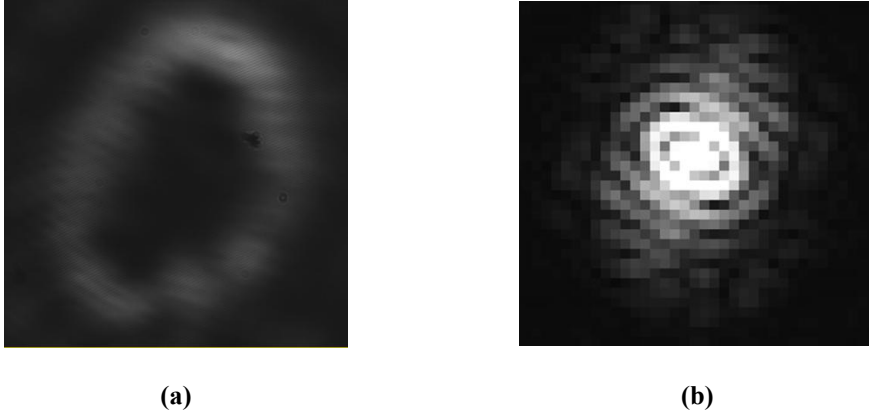


Figura 64. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico experimental de carga topológica $l = 6$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

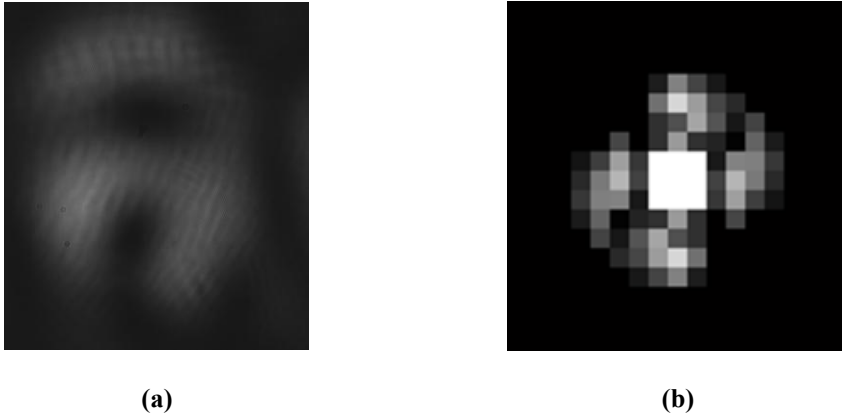


Figura 65. (a) Patrón de intensidad de un Vórtice óptico experimental de carga topológica $l = 1,5$. (b) Resultado usando método de Prabhakar para el patrón mostrado en (a).

Observando los resultados experimentales se comprueba que el método de Prabhakar es bastante bueno para caracterizar vórtices ópticos con carga topológica entera, sin embargo para cargas topológicas fraccionarias presenta problemas para descifrar los anillos oscuros y así la carga topológica. En el capítulo de Ambigüedades en la caracterización de vórtices ópticos se mostrará en detalle la dificultad mencionada.

Ambigüedades de la Caracterización

5

Todo haz de luz que contenga una distribución de fase espiral en su frente de onda poseerá un momento angular orbital proporcional a la carga topológica l , donde l es el número de veces que la fase espiral recorre el rango de 0 a 2π . Para valores de la carga topológica enteros el patrón de difracción observado en un plano correspondiente al plano de Fourier, aparecerá como un anillo de luz, cuyo radio dependerá directamente del valor de l . El centro del anillo tiene una intensidad nula y corresponde a un vórtice de carga l o punto donde la fase del frente de onda no está definida. Cuando la magnitud de la carga tiene un valor entero superior a la unidad el vórtice estará ubicado sobre el eje óptico siempre que no existan defectos como aberraciones ópticas o asimetrías. En el caso que tome valores fraccionales el patrón de intensidad en forma de anillo comenzará a deformarse, tal que el vórtice original se separará para formar vórtices de carga elemental uno, volviéndose a juntar solo cuando se alcanza un nuevo valor entero de la carga topológica. No obstante, dado que en los montajes experimentales es muy difícil eliminar todas las imperfecciones de los haces con l entero, sumado a las limitaciones que tienen las técnicas de caracterización para resolver pequeños detalles, las deformaciones que se generan en el anillo para ciertos casos se asemejan a las deformaciones encontradas para valores de l fraccionales. Estas situaciones pueden llevar a una caracterización errónea del vórtice, en especial para los casos en los que no se conoce con anterioridad la carga del mismo. A continuación se generan vórtices ópticos usando máscaras de fase multiplicadas por una pupila cuya abertura puede ser circular o elíptica, centrada o descentrada. El análisis de la amplitud y la fase de los vórtices, permite evidenciar la presencia de ambigüedades.

Los vórtices ópticos generados están identificados por los siguientes parámetros:

- La carga topológica del vórtice l .
- La deformación del haz incidente sobre la máscara de fase encargada de generar el vórtice, esta deformación se propone de forma elíptica y se parametriza mediante el tamaño de los semiejes menor y mayor de la elipse, *semia* y *semib*.

- El desplazamiento del haz incidente sobre el eje horizontal respecto al centro de la máscara de fase, *desp*.

Se generaron computacionalmente diversas máscaras de fase con diferentes cargas topológicas fraccionarias y se introdujeron diferentes problemas de montaje (deformación y descentralización del haz) para las cuales se estudió el patrón de intensidad y la fase del campo óptico en el plano de Fourier. Los parámetros fueron variados de la siguiente manera en las simulaciones.

- *l*: Se varió desde 1 hasta 3 de a 0.2 incluyendo también las cargas semi-enteras (1.5 y 2.5).
- *semia* y *semib*: Se variaron desde 0.007 hasta 0.01 de a 0.001.
- *desp*: Se vario desde 0.0 hasta 0.004 de a 0.002.

Después de realizar las simulaciones mencionadas anteriormente se buscaron los patrones de Intensidad mas similares producidos por un vórtice con carga topológica fraccional y por un vórtice con carga topológica entera pero que posee problemas de montaje.

Ambigüedades en el patrón de intensidad

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 66 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2.5$; $semia=0.007$; $semib=0.007$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 66 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.008$; $semib=0.009$; $desp=0.004$.

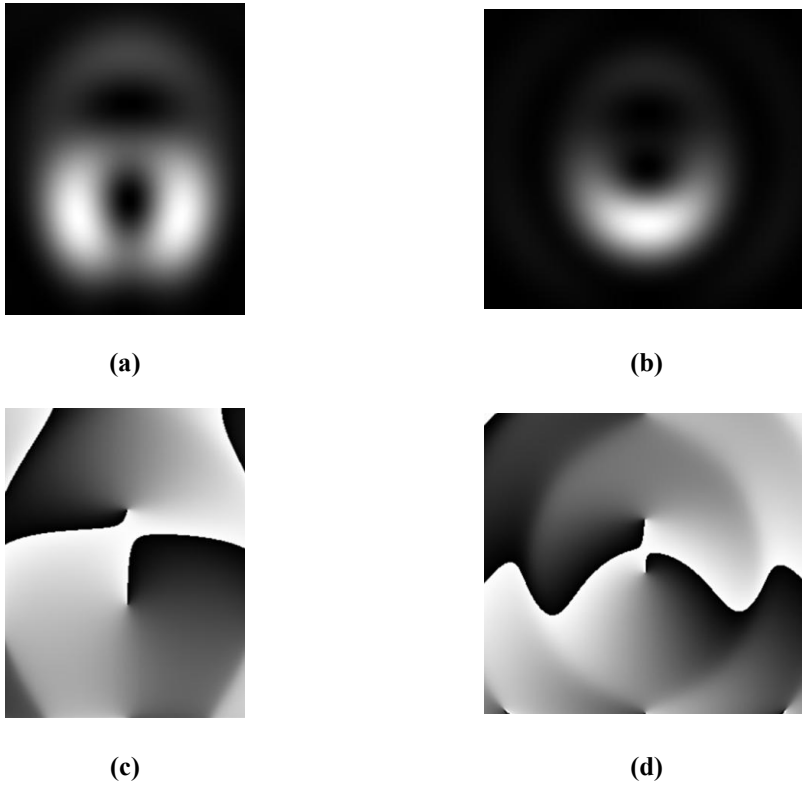


Figura 66. Ambigüedad en el patrón de intensidad para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 67 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2.8$; $semia=0.007$; $semib=0.007$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 67 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=3$; $semia=0.008$; $semib=0.009$; $desp=0.002$.

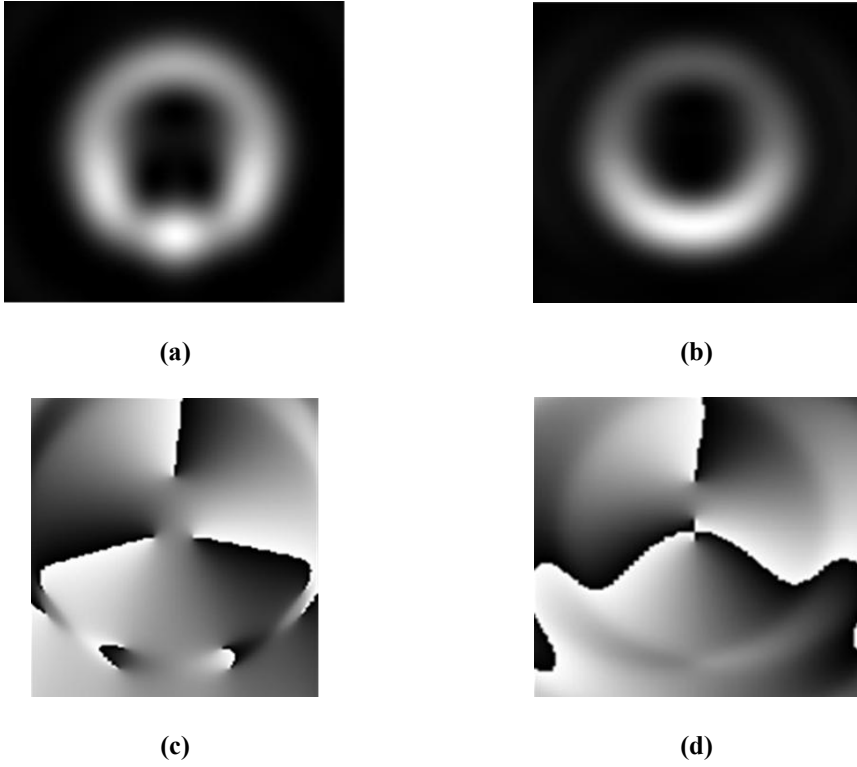


Figura 67. Ambigüedad en el patrón de intensidad para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 68 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.6$; $semia=0.009$; $semib=0.009$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 68 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.008$; $semib=0.01$; $desp=0.004$.

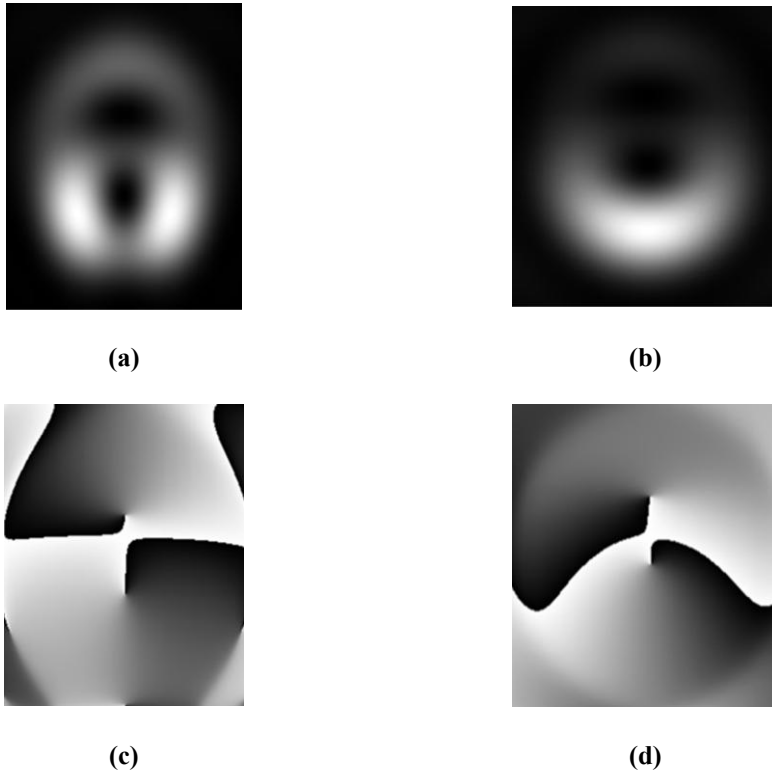
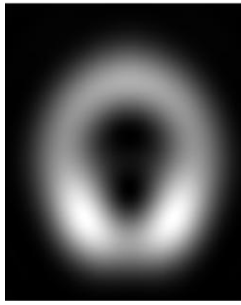


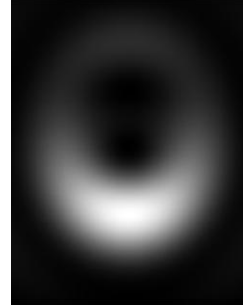
Figura 68. Ambigüedad en el patrón de intensidad para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 69 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.8$; $semia=0.009$; $semib=0.009$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 69 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.009$; $semib=0.01$; $desp=0.004$.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 69. Ambigüedad en el patrón de intensidad para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 70 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2.5$; $semia=0.007$; $semib=0.007$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 70 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=3$; $semia=0.008$; $semib=0.009$; $desp=0.004$.

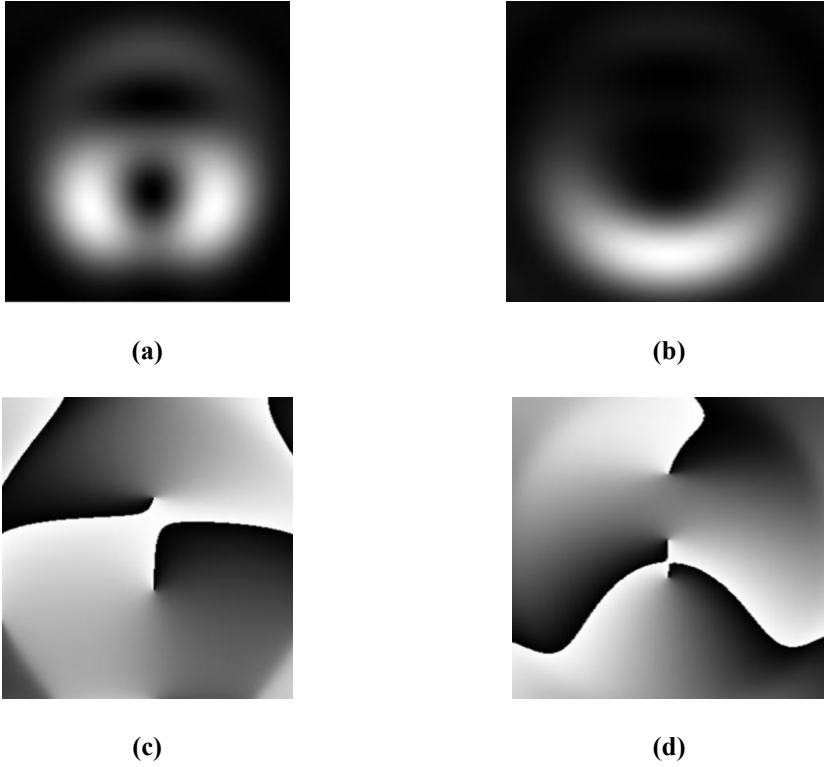


Figura 70. Ambigüedad en el patrón de intensidad para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

También presentamos el caso en que un mismo vórtice de carga entera con problemas de montaje, posee varias ambigüedades con diferentes vórtices de carga fraccional que son bastante cercanas.

Las imágenes (a) y (e) de la Figura 71 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.008$; $semib=0.01$; $desp=0.004$

Las imágenes (b) y (f) de la Figura 71 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.4$; $semia=0.008$; $semib=0.008$; $desp=0.0$

Las imágenes (c) y (g) de la Figura 71 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.5$; $semia=0.009$; $semib=0.009$; $desp=0.0$

Las imágenes (d) y (h) de la Figura 71 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.6$; $semia=0.007$; $semib=0.007$; $desp=0.0$

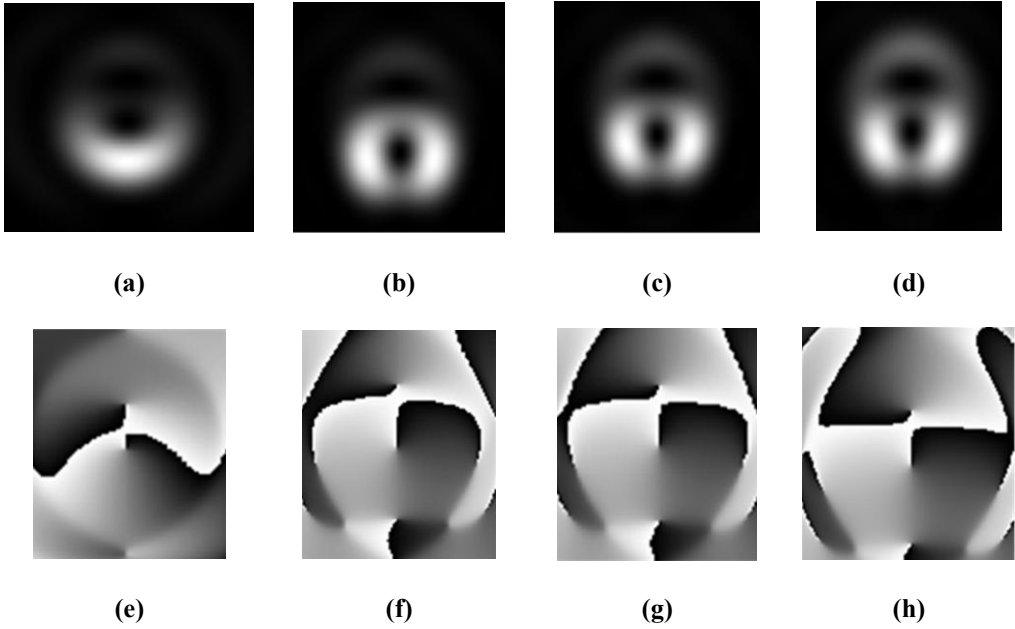


Figura 71. Ambigüedad en el patrón de intensidad para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Ambigüedades en la fase

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 72 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.2$; $semia=0.01$; $semib=0.01$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 72 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1$; $semia=0.009$; $semib=0.009$; $desp=-0.002$.

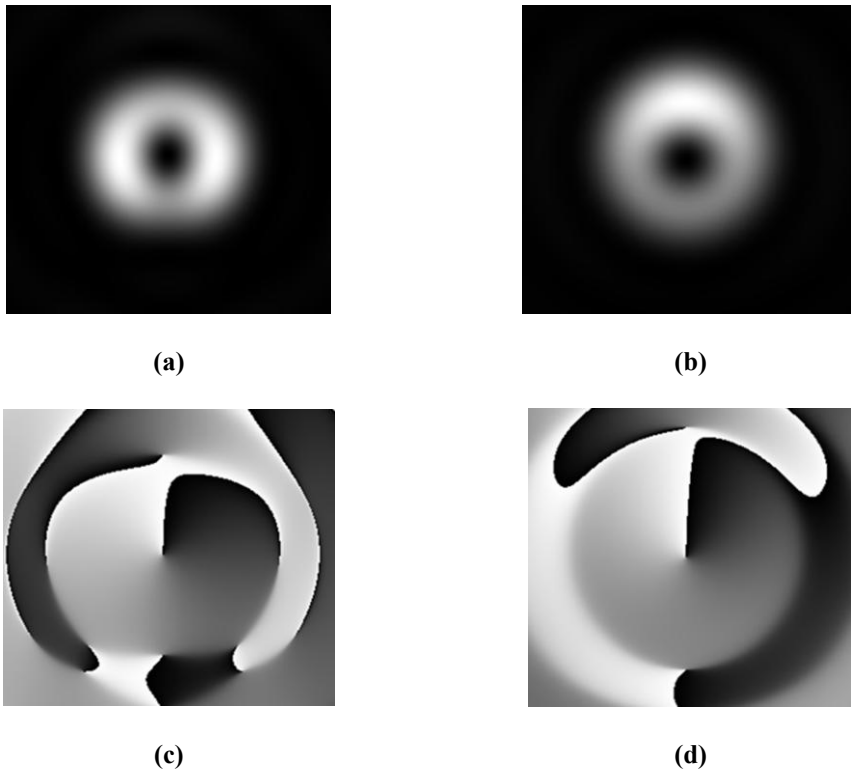


Figura 72. Ambigüedad en la fase para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 73 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.8$; $semia=0.007$; $semib=0.007$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 73 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.007$; $semib=0.008$; $desp=0.002$.

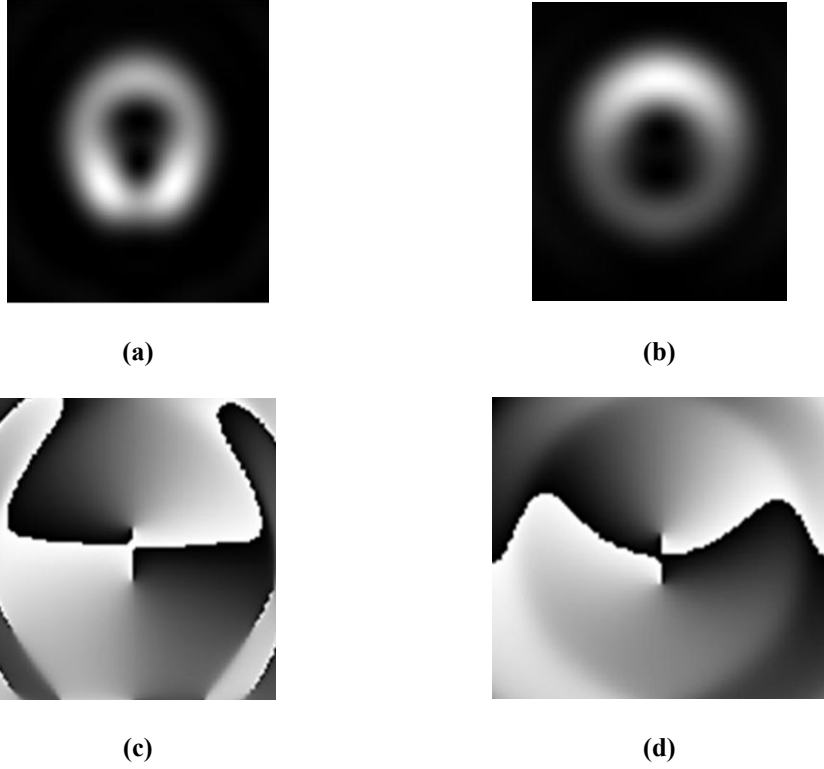


Figura 73. Ambigüedad en la fase para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Ambigüedades tanto en la Intensidad como en la Fase

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 74 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=1.8$; $semia=0.009$; $semib=0.009$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 74 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.007$; $semib=0.008$; $desp=0.002$.

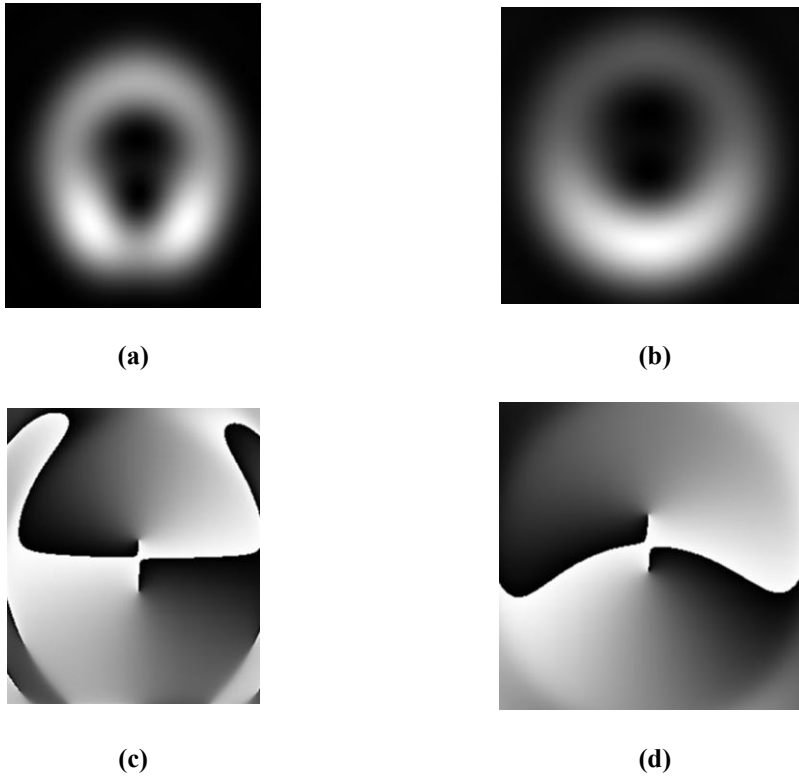


Figura 74. Ambigüedad en el patrón de intensidad y en la fase para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Las imágenes (a) y (c) de la Figura 75 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2.2$; $semia=0.008$; $semib=0.008$; $desp=0.0$.

Las imágenes (b) y (d) de la Figura 75 corresponden al patrón de Fourier de un vórtice con los parámetros $l=2$; $semia=0.009$; $semib=0.007$; $desp=0.0$.

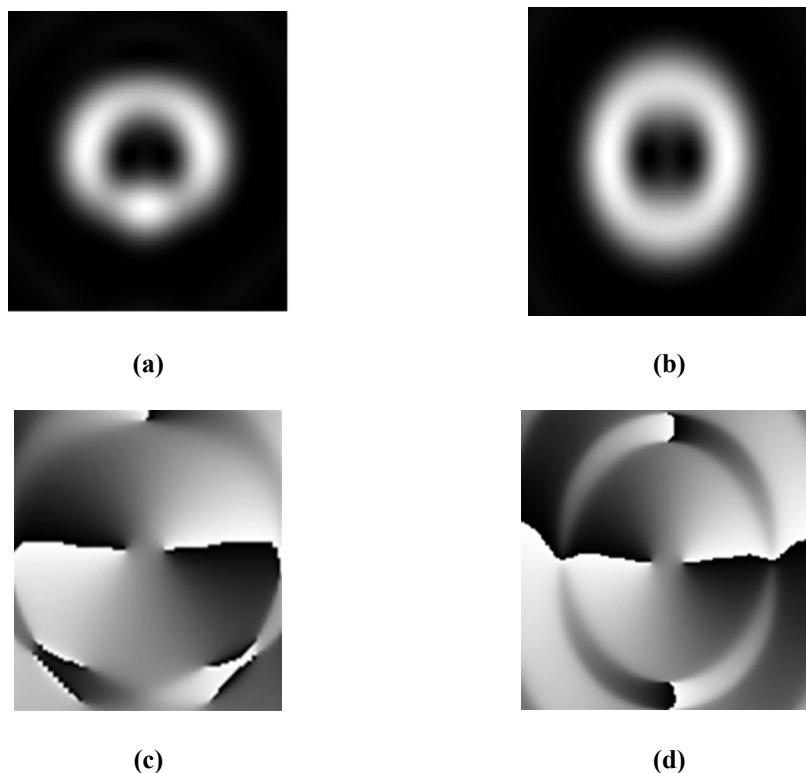


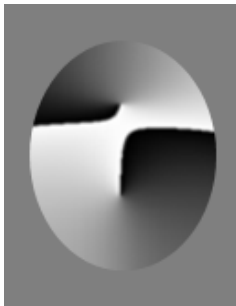
Figura 75. Ambigüedad en el patrón de intensidad y en la fase para vórtices ópticos generados con diferentes parámetros.

Que la pupila sea elíptica se entiende como que el haz está deformado generando que el vórtice de carga $l > 1$ se separe en varios vórtices de carga $l = 1$. Que el haz no incida centrado en la máscara de fase causa que la luz no quede distribuida homogéneamente sobre el patrón de intensidad observado.

Claro está que para los vórtices computacionales mostrados (Figura 66 a la Figura 75, Figura 67) si se detectan ciertas diferencias sutiles en la intensidad y/o en la fase lo que da la capacidad de romper con la ambigüedad. Pero los vórtices que se desean caracterizar precisamente son experimentales los cuales no presentan una estructura tan estable como los computacionales (Figura 61 a la Figura 65). Una dificultad que aparece en el momento de caracterizar un vórtice óptico, usando el método de Denisenko es que con éste solo se determina la fase de la zona iluminada y la interior a ella en el patrón de intensidad en el plano de observación. Lo anterior conlleva a que la parte que se puede medir de la fase del campo óptico es pequeña comparada con todo el plano en el que se obtiene teórica y/o computacionalmente. A continuación se presentan las imágenes de las ambigüedades mostradas, pero solo lo que se podría determinar mediante el método mencionado. Estas imágenes se

obtuvieron recortando las imágenes de los planos completos respecto a la zona iluminada en el patrón de intensidad, (se muestran solo las imágenes de la fase, ya que con estas se hace explícita la ambigüedad, además de que el patrón de intensidad no cambia).

En las dos siguientes ambigüedades se confirma que solo aparecía ambigüedad en el patrón de amplitud.

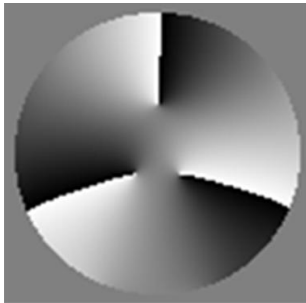


(a)



(b)

Figura 76. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 66(a). (b) y en la Figura 66(b).



(a)



(b)

Figura 77. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 67(a). (b) y en la Figura 67(b).



(a)



(b)

Figura 78. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 68(a). (b) y en la Figura 68(b).



(a)

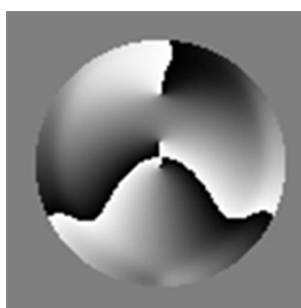


(b)

Figura 79. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 69(a). (b) y en la Figura 69(b).



(a)



(b)

Figura 80. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 70(a). (b) y en la Figura 70(b).

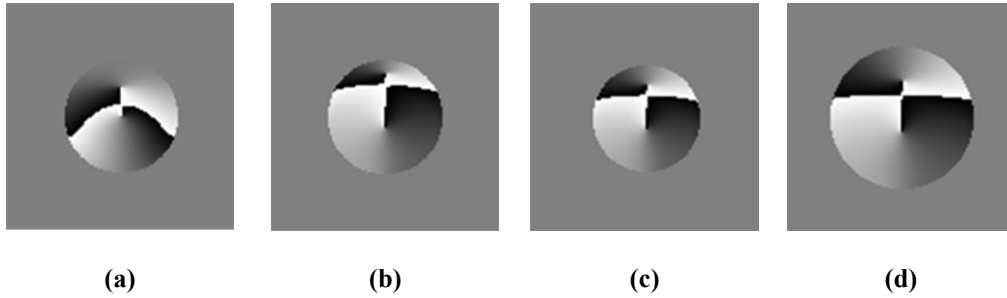


Figura 81. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 71(a). (b) en la Figura 71(b). (c) en la Figura 71(c). (d) y en la Figura 71(d).



Figura 82. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 72(a). (b) y en la Figura 72(b).



Figura 83. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 73(a). (b) y en la Figura 73(b).



Figura 84. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 74(a). (b) Figura 74(b).



Figura 85. (a) Fase que se puede determinar del vórtice mostrado en la Figura 75(a). (b) y en la Figura 75(b).

En las figuras mostradas se resalta la dificultad en algunos casos, de lograr una caracterización general de un vórtice del cual no se conoce su carga topológica. Además de esto se tiene también la calidad reducida de los vórtices generados experimentalmente, en los cuales aparecen problemas de ruido, baja eficiencia y/o de muestreo dependiendo del dispositivo que se implemente para detectar la intensidad, a diferencia de los expuestos que son ideales. Así que, el problema de la ambigüedad entre vórtices con carga fraccionaria y vórtices con carga entera que poseen problemas de simetría, sigue siendo difícil de resolver por la incapacidad de producir excelentes vórtices experimentalmente.

Como vemos a partir de los métodos de caracterización expuestos la ambigüedad sobrevive puesto que con el método de Denisenko la fase no puede ser determinada en su totalidad y el método de Prabhakar genera resultados dudosos para vórtices de cargas fraccionarias. Así que, para tratar de solucionar la ambigüedad que aparece se

implementó el método de caracterización propuesto por Luis (e) de Araujo [22], en el cual se hace incidir el vórtice sobre una abertura triangular y luego se observa el patrón de difracción de campo lejano, el cual presenta un arreglo triangular de puntos los cuales se relacionan linealmente con la carga del vórtice (Figura 86).

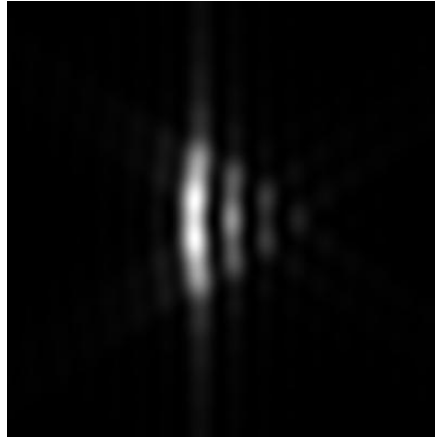
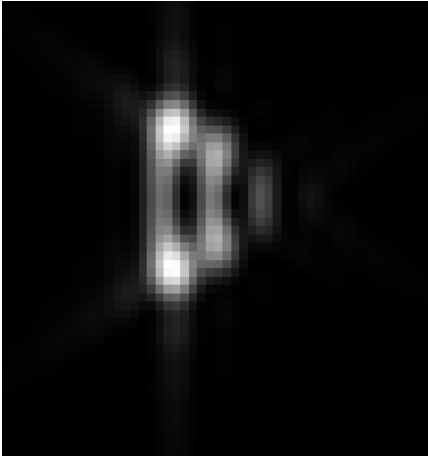
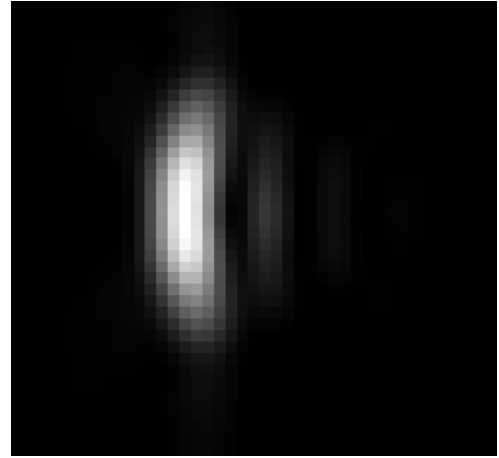


Figura 86. Patrón de difracción de campo lejano para la incidencia de un vórtice óptico sobre una abertura triangular.

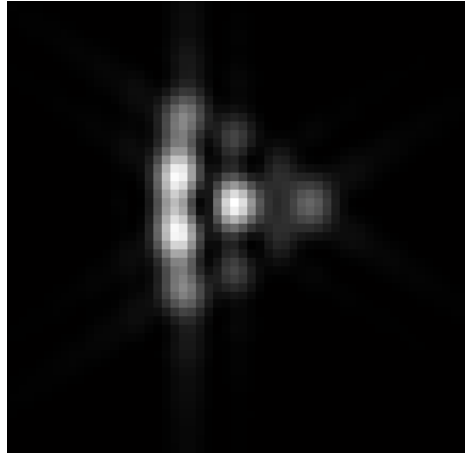
El número de puntos sobre una de las aristas del triángulo que se forma en el patrón de difracción, menos uno ($N - 1$) es la carga topológica del vórtice incidente sobre la abertura triangular. Para vórtices con carga entera el método da resultados bastante acertados. En la Figura 86, el vórtice que se incidió sobre la abertura triangular tenía una carga topológica de tres y no poseía ningún problema de montaje, y como se puede observar aparece un total de cuatro puntos sobre una arista lo que implica que el método funciona de manera correcta ($N - 1 = 3$, donde $N = 4$). Pero a la hora de usar este método para vórtices con carga topológica fraccionaria o para vórtices con carga topológica entera que en su generación se hayan tenido problemas de montaje, el método pierde su efectividad (Figura 87).



(a)



(b)



(c)

Figura 87. Patrón de difracción de campo lejano para la incidencia de un vórtice óptico sobre una abertura triangular con: (a) Elipticidad en el haz en la formación del vórtice óptico de carga topológica $l = 3$. (b) Descentralización del haz en la formación del vórtice óptico de carga topológica $l = 3$. (c) Carga fraccionaria $l = 3,5$ sin problemas de montaje.

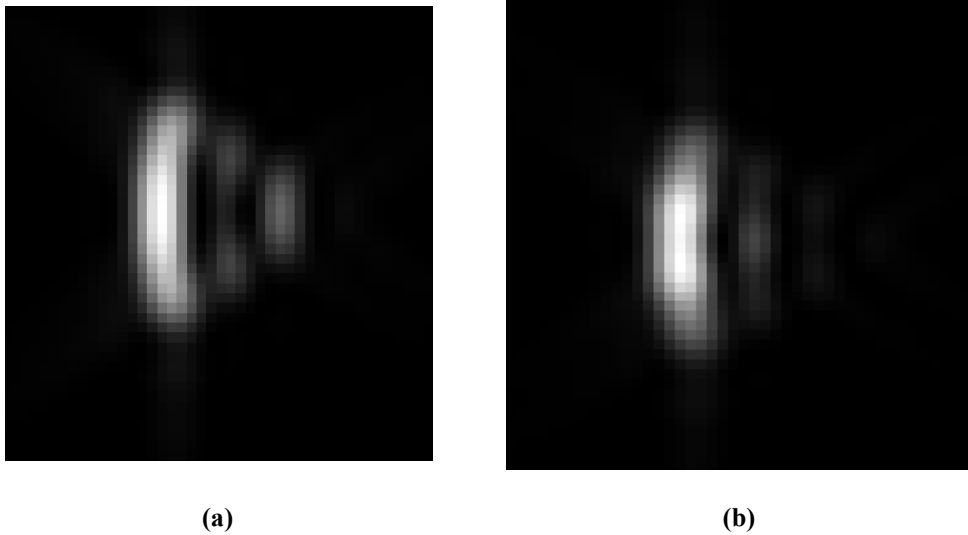


Figura 88. Patrón de difracción de campo lejano para la incidencia de un vórtice óptico sobre una abertura triangular con: (a) Carga fraccionaria $l = 2,8$ sin problemas de montaje. (b) Descentralización del haz en la formación del vórtice óptico de carga topológica $l = 3$.

De los resultados obtenidos vemos que para que el método del triángulo funcione, este debe estar centrado respecto al vórtice, lo que introduce nuevas variables al problema. Las imágenes del patrón de difracción producido por un vórtice con carga entera producido sin problemas de montaje, al incidir sobre la abertura ligeramente desplazada en el eje vertical, se asemeja al patrón de difracción producido por un vórtice de carga fraccional que incide sobre la abertura centrada (Figura 88). Por tanto el método del triángulo no es efectivo para romper la ambigüedad entre un vórtice con carga fraccionarias y un vórtice con carga entera con problemas de montaje. Pero, si puede ser usado para determinar cuando un montaje óptico posee problemas de desalineación, ya que para este caso el patrón de difracción producido por la abertura triangular aparece distorsionado.

Anexos

6

Caracterización del Modulador Espacial de Luz (SLM)

Para poder realizar cualquier trabajo experimental óptico que involucre el uso de un Modulador Espacial de Luz o SLM por sus siglas en inglés (Spatial Light Modulator), se debe tener cuidado con las limitantes que éste nos disponga. Precisamente, la tarea de caracterizar un SLM es conocer estas limitantes y los umbrales de modulación. La respuesta en la modulación de cada modulador es cualitativamente similar a los demás moduladores que posean las mismas características sin embargo, el tiempo de uso y la construcción de cada SLM puede causar que las respuestas en la modulación sean cuantitativamente diferentes a las de otros moduladores. Las curvas de modulación pueden ser bastante parecidas entre moduladores del mismo estilo pero, no son exactamente iguales. Así que para cada modulador hay que construir las curvas de modulación para intensidad y para fase, para poder tener un completo control y lograr los resultados en nuestros experimentos ópticos de forma óptima.

Las caracterizaciones para un SLM pueden realizarse por distintos métodos. En esta ocasión se trató de crear o utilizar un método que se pudiera automatizar, para poder realizar el mismo trabajo de caracterización en próximas ocasiones. Se utilizaron métodos difractivos y un método interferométrico para construir las curvas de modulación.

Métodos para la Caracterización

Método Interferométrico

Se dispuso de un interferómetro Mach-Zehnder como se muestra en la Figura 89.

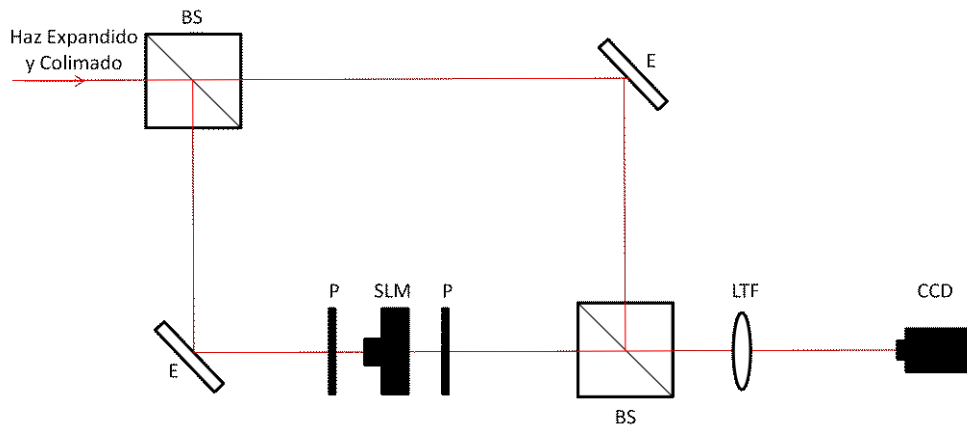


Figura 89. Interferómetro de Mach-Zehnder. BS: Beam Splitter; E: Espejo Plano; P: Polarizador; LTF: Lente Convergente.

El segundo polarizador (el que está después del SLM) que aparece en el montaje se encarga de analizar el estado de polarización de la luz emergente del SLM, por esta razón a este polarizador lo llamaremos Analizador. La orientación y el sistema de referencia tomado para los ángulos en los polarizadores se muestran en la Figura 90. A una posición específica del polarizador y analizador lo llamaremos Estado de Polarización del Sistema de Modulación.

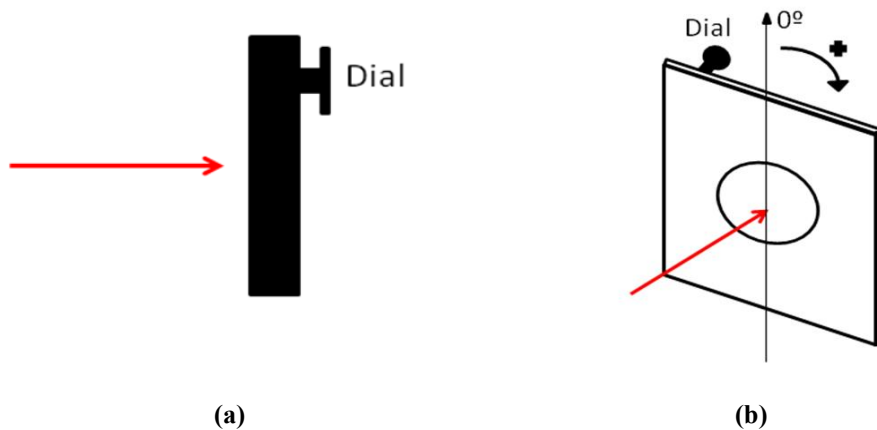


Figura 90. (a) Disposición de cada polarizador respecto a la luz emergente. (b) Sistema de Referencia para la medición de ángulos en los polarizadores.

En la CCD se registran las imágenes correspondientes al desfase producido por una pantalla dividida por dos (mitad con nivel de gris cero y la otra mitad con nivel de gris variante de 0 a 255, Figura 91a) proyectada en el modulador. Se tomó una

imagen por cada variación de nivel de gris (NG) producida en una de las mitades de la pantalla proyectada. De la interferencia generada por la luz emergente del sistema de modulación y de la luz que no fue modificada, que actúa como luz de referencia, se obtiene en las imágenes registradas una fractura como se ve en la Figura 91b.

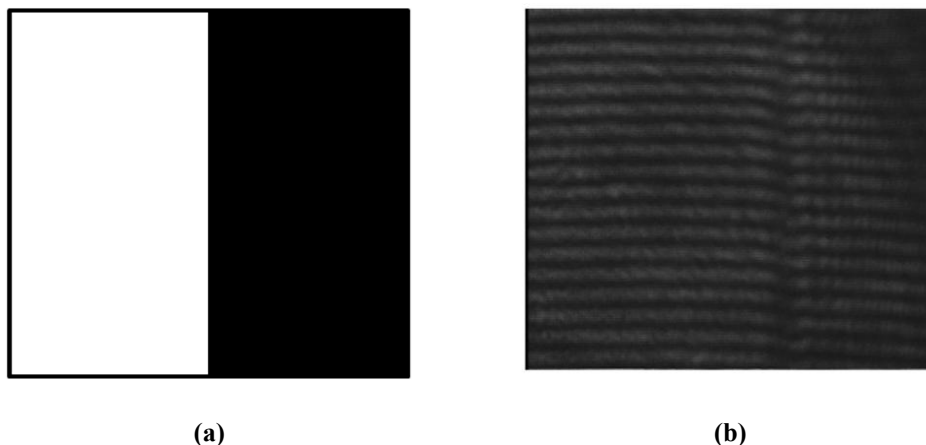


Figura 91. (a) Pantalla dividida por la mitad en dos niveles de gris. (b) La fractura que aparece en la imagen se produce por la frontera entre los dos NG proyectados en el SLM.

A cada lado de la fractura se encuentra la interferencia producida por cada nivel de gris con la luz de referencia. Midiendo la distancia vertical entre dos máximos de interferencia para un mismo nivel de gris (Figura 92), a esta distancia la llamaremos a_M . También se mide la distancia vertical que hay entre un máximo del NG de referencia ($NG = 0$) y un máximo del NG que se está estudiando a esta distancia la llamaremos b_M . Estas medidas fueron tomadas con la ayuda de la herramienta *Line Profile* del programa *Matrox Inspector 4.0*, la cual mide esta distancia en píxeles. Como la distancia a_M es la cantidad asociada al desfase de 2π , luego comparando esta medida con la cantidad b_M , se puede determinar el desfase producido por cada NG proyectado en el modulador.

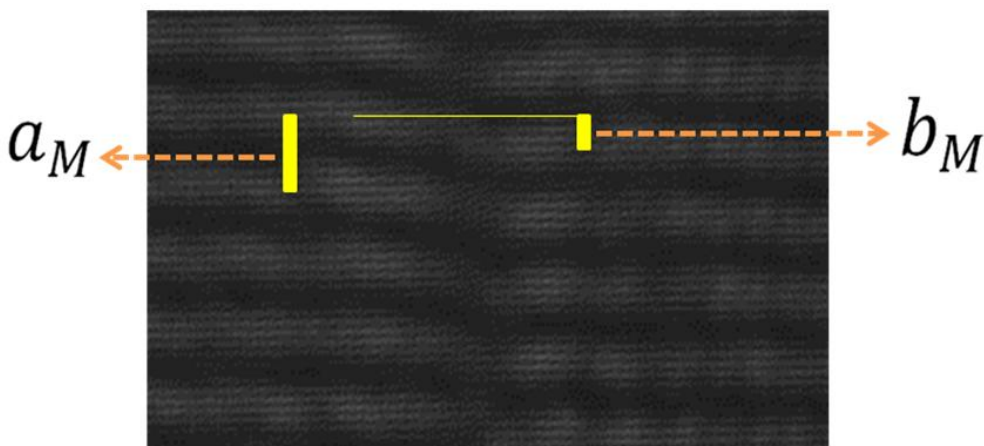


Figura 92. a_M es la distancia entre máximos para el mismo nivel de gris y b_M es la distancia entre los máximos de cada nivel de gris.

Las distancias medidas en pixeles para a_M y para b_M se muestran en la Tabla 1 y la curva para la caracterización de fase se muestra en la Figura 93. Hay que recordar que esta curva cambia para diferentes posiciones del polarizador y el analizador; para este caso se uso el siguiente estado de polarización del sistema de modulación: P: 310° - A: 10° .

<i>NG</i>	<i>a_M</i>	<i>b_M</i>	<i>NG</i>	<i>a_M</i>	<i>b_M</i>
0	28	0	140	27	0
10	29	1	150	29	0
20	29	0	160	27	1
30	28	1	170	29	2
40	28	1	180	28	7
50	29	1	190	29	10
60	29	1	200	29	14
70	29	1	210	28	15
80	28	1	220	27	17

NG	a_M	b_M	NG	a_M	b_M
90	29	2	230	27	16
100	28	1	240	28	17
110	27	0	250	28	18
120	26	1	255	29	19
130	29	1			

Tabla 1. Distancias medidas en pixeles para a_M y para b_M para cada Nivel de Gris.

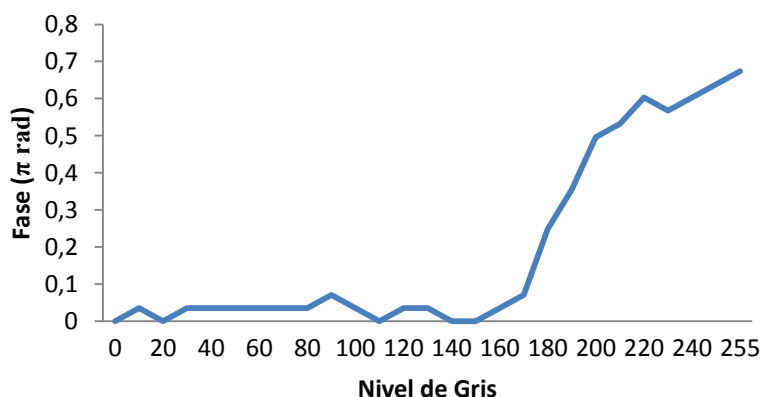


Figura 93. Curva de Fase para P: 310° - A: 10° (Tabla 1).

Método de Engström

Buscando poder encontrar la curva de caracterización de fase para el modulador, de una manera fácil que sea automatizable y que no contenga las altas dificultades de alineación que presenta el método de Interferometría, se utilizó el método de Engström [23] el cual halla la modulación de fase mediante un montaje óptico que estudia la difracción de la luz.

El método de Engström consiste en generar rejillas de Ronchi, de tres barras (B1, B2 y B3) de anchos diferentes como se muestra en la Figura 94. A cada barra se le asigna un Nivel de Gris (NG). Dejando constantes los niveles de gris para B2 ($NG2 = 130$) y B3 ($NG3 = 0$) y haciendo variar el nivel de gris de B1 desde 0 hasta

255 [2]. Esta variación se realiza para 19 tipos de rejillas diferentes determinadas por los tamaños de B1, B2 y B3 como se muestran en la Tabla 2.



Figura 94. Rejilla del método de Engström con tres barras de diferente grosor.

Rejilla No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
B1	4	8	12	16	20	24	24	24	24	24

B2	20	16	12	8	4	20	16	12	8	8
B3	24	24	24	24	24	4	8	12	16	16

Rejilla No.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B1	24	4	8	12	16	20	16	0	24	24
B2	4	24	24	24	24	24	16	24	0	24
B3	20	20	16	12	8	4	16	24	24	0

Tabla 2. Los tamaños de B1, B2 y B3 están dados en pixeles.

Se miden las intensidades del patrón cero de difracción producido por cada rejilla propuesta en el Método de Engström. En total se toman 19×27 datos; de 19 tipos de rejillas y 27 valores de gris para cada una. Estas se medidas se tomaron con la ayuda del programa de Matlab *projyrej.m*, con estos valores de intensidades se dispone a encontrar el mínimo de la función

$$f(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{I_M^{(n)}}{\sum_{n=1}^N I_M^{(n)}} - \frac{I_T^{(n)}(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2)}{\sum_{n=1}^N I_T^{(n)}(\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2)} \right]^2 \quad \text{Ec. 52}$$

Donde $\Delta\varphi_1$ es la diferencia de fase de los NG entre B1 y B3; $\Delta\varphi_2$ es la diferencia de fase de los NG entre B2 y B3; N es el número total de rejillas, $I_M^{(n)}$ es la intensidad medida del primer orden de difracción para la n-ésima rejilla y $I_T^{(n)}$ es la intensidad teórica del primer orden de difracción para la n-ésima rejilla [23].

En el momento en que esta función se minimiza es porque las intensidades experimentales son muy similares a las intensidades teóricas. Esta minimización, desarrollada mediante la función de Matlab *fminsearch*, se realiza para un valor constante de $\Delta\varphi_2$. De aquí se obtiene el valor de $\Delta\varphi_1$, con el cual realizando el mismo procedimiento de minimización pero esta vez dejando constante el valor de $\Delta\varphi_1$, se encuentra el valor de $\Delta\varphi_2$ [23].

Como se considera que el NG para B3 es cero se toma la fase asociada como cero y con este valores de $\Delta\varphi_1$ y $\Delta\varphi_2$ se construye la curva de caracterización de Fase para el modulador. Usando este método no se logro encontrar un único par de valores $\Delta\varphi_1$ y $\Delta\varphi_2$ por esta razón es que finalmente se decidió hacer el método a un lado y en una próxima vez intentar utilizarlo de nuevo.

Método del Par de Young

Este método fue diseñado para lograr caracterizar el modulador tanto en Amplitud como en Fase. Sin embargo, solo arrojo resultados coherentes y bastante buenos para la modulación de Fase.

Se dispone del siguiente montaje óptico: Una luz incidente ampliada y colimada, el sistema de modulación, después del Modulador se colocó una filmina de acetato con dos agujeros (Par de Young, Figura 95) ambos con diámetro de 0,05 mm y separación entre ellos de 0,08 mm; una Lente Convergente L1, para realizar la Transformada de Fourier de distancia focal 200 mm, una segunda Lente Convergente L2, para aumentar la imagen de la Transformada de Fourier producida de distancia focal 50 mm y una cámara Pulnix TM6703 CCD (Figura 96).

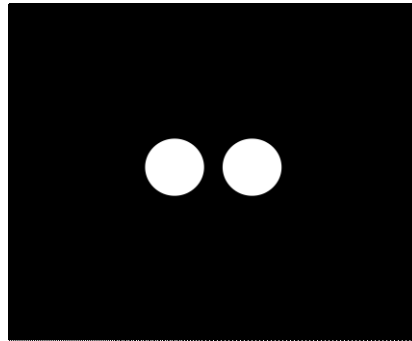


Figura 95. Par de Young, diámetro de las aberturas es de $0,5\text{ mm}$ y la separación entre los centros de cada una $0,8\text{ mm}$.

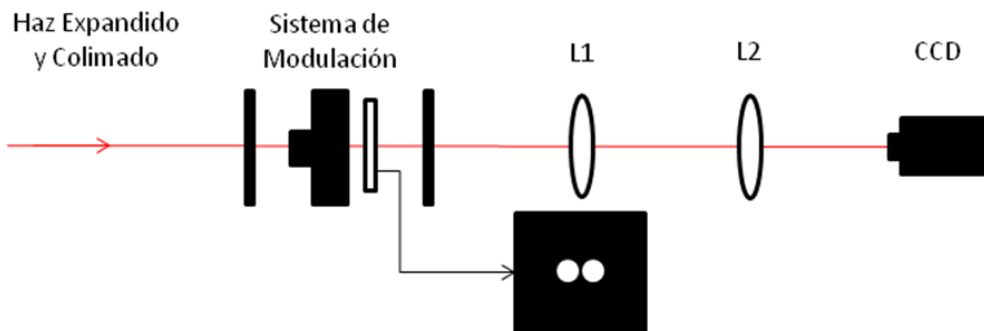


Figura 96. La distancia entre el Sistema de Modulación y L1 es **20 cm** ; la distancia entre L1 y L2 es **28 cm** y la distancia entre L2 y la cámara CCD es **27 cm** .

El método del Par de Young se basa en proyectar mediante el modulador un nivel de gris diferente en cada una de las aberturas. En una de las aberturas se proyecta un nivel de gris constante ($NG = 0$) mientras que para la otra abertura se varía el nivel de gris de 0 hasta 255 con el fin de detectar el patrón de difracción producido por cada par de niveles de gris para las aberturas, para esto es que se usan las lentes. L1 para generar el patrón de campo lejano y L2 es para ampliar el patrón de difracción obtenido. Así que, se parte de proyectar un NG de cero en ambas aberturas, luego se detecta el patrón de difracción producido que presenta los máximos en ciertas posiciones específicas; al cambiar el NG en una de las aberturas el cambio que sufre el patrón de difracción, además de la intensidad, es un desplazamiento de la posición de los máximos. Este desplazamiento se relaciona con la fase de la luz incidente en las aberturas, luego a partir del estudio del desplazamiento relativo entre los máximos del patrón de difracción para distintos niveles de gris, se puede construir la gráfica de modulación de fase para los niveles de gris de 0 a 255.

El procedimiento de proyección de los diferentes NG en una de las aberturas y de detección del Patrón de Difracción se realiza mediante el programa *Patronyoung.m* y el proceso de determinación de la fase después de la detección de las imágenes se desarrolla a través del programa de Matlab *Defase.m* de Matlab realizados por E. Rueda.

Los resultados obtenidos son bastante buenos, con alto grado de confiabilidad por que se manejan de forma directa los resultados predichos por la teoría de difracción del Par de Young [16]; por lo que se concluyó que este método era muy acertado a la hora de realizar la caracterización de Fase. Un aspecto bastante positivo de este método es que permitió automatizarlo para poder volverlo a utilizar y que la toma de datos sea rápida y efectiva para una caracterización futura.

A partir de este método se construyeron las graficas de modulación de Fase para diferentes estados de polarización del sistema de modulación, estos estados se muestran en la Tabla 3 y las graficas se muestran en la Figura 97.

Estado de Polarización	Posición Polarizador	Posición Analizador
1	40°	280°
2	59°	70°
3	310°	10°
4	355°	55°

Tabla 3. Estados de Polarización.

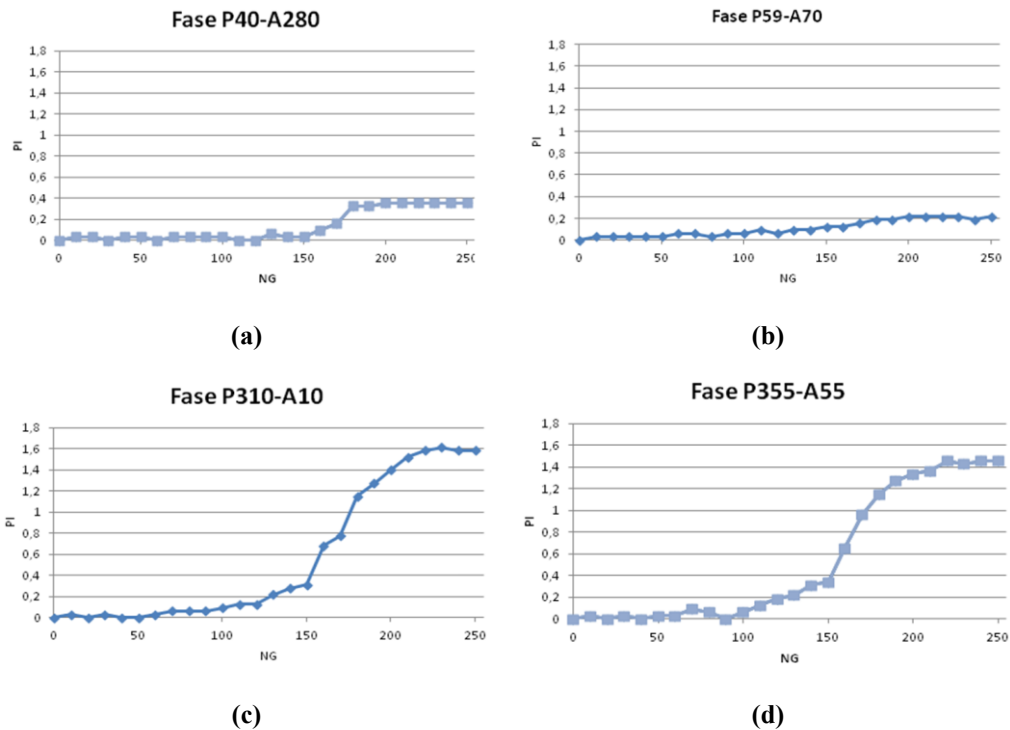


Figura 97. Gráficas de la caracterización de fase para los estados de polarización mostrados en la Tabla 3.

A partir de las curvas encontradas de la modulación de Fase (Figura 97) se construyen los polinomios que se ajusten a las curvas para cada estado de polarización del sistema de modulación, estos se muestran en la Tabla 4.

Estado de polarización	Polinomio Aproximado
a	$y = 2E - 13x6 - 1E - 10x5 + 4E - 08x4 - 5E - 06x3 + 0,0003x2 - 0,0046x + 0,0251$
b	$y = 4E - 14x6 - 3E - 11x5 + 8E - 09x4 - 9E - 07x3 + 3E - 05x2 + 0,0004x + 0,0098$
c	$y = 4E - 13x6 - 3E - 10x5 + 9E - 08x4 - 1E - 05x3 + 0,0007x2 - 0,0126x + 0,0449$
d	$y = 6E - 13x6 - 4E - 10x5 + 1E - 07x4 - 1E - 05x3 + 0,0007x2 - 0,0131x + 0,042$

Tabla 4. Polinomios que ajustan las caracterizaciones de la Figura 97.

Método Común del Potenciómetro

Este método se usa para encontrar la curva de modulación de Amplitud. El método común del Potenciómetro se basa en medir la intensidad de salida del sistema de modulación al proyectarse en la pantalla completa del modulador un *NG*. La medida de intensidad se realizó mediante un potenciómetro Newport Power-Meter Model 1815-C, luego en Excel se grafican los datos. Este método aunque es el que asume más trabajo es el más seguro para el estudio de la modulación de Amplitud. Los resultados para los cuatro estados de polarización del sistema de modulación (Tabla 3) se muestran en la Figura 98.

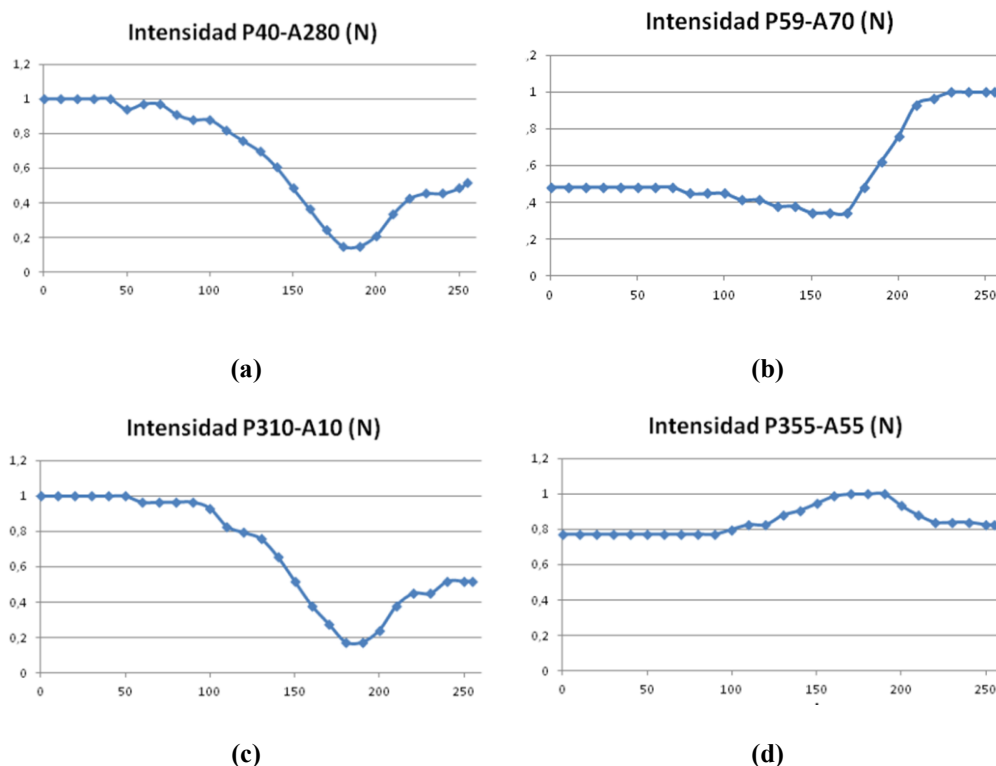


Figura 98. Gráficas de la caracterización de intensidad para los estados de polarización mostrados en la Tabla 3. La Letra (N) significa que las gráficas están Normalizadas.

Nuevamente a partir de estas curvas se construyen los polinomios Aproximados (Tabla 5).

Estado de polarización	Polinomio Aproximado
a	$y = -4E - 13x^6 + 3E - 10x^5 - 7E - 08x^4 + 8E - 06x^3 - 0,0004x^2 + 0,0062x + 0,9882$
b	$y = -7E - 14x^6 + 2E - 11x^5 + 5E - 09x^4 - 2E - 06x^3 + 0,0001x^2 - 0,0037x + 0,4966$
c	$y = -5E - 13x^6 + 3E - 10x^5 - 8E - 08x^4 + 8E - 06x^3 - 0,0004x^2 + 0,0059x + 0,9887$
d	$y = 1E - 13x^6 - 7E - 11x^5 + 1E - 08x^4 - 8E - 07x^3 + 6E - 06x^2 + 0,0005x + 0,7665$

Tabla 5. Polinomios que ajustan las caracterizaciones de la Figura 98.

El resultado obtenido para el estado de polarización del sistema de modulación P: 355° A: 55° tiene la mínima variación de Amplitud para todos los NG mientras que varía de muy buena manera en la modulación de Fase lo que significa que este estado es por ahora el óptimo para ser usado en el trabajo en el laboratorio que implique una buena modulación de Fase. Mientras que para el estado de polarización del sistema de modulación P: 310° A: 10° la amplitud varia sobre muchos valores para todos los NG lo que significa que este es el estado de polarización del sistema de modulación más indicado para el trabajo que implique modulación de amplitud.

Método de la Matriz de Jones

El método de la Matriz de Jones se basa en registrar varios valores de intensidad para los cuales se va cambiando el estado de polarización del sistema de modulación. En el estado de polarización para este caso se debe considerar también la posición de una lámina de cuarto de onda la cual ayuda para una modulación más pura tanto en Fase como en Amplitud. La matriz de Jones es una matriz 2×2 de coeficientes complejos los cuales se determinan a partir de las medidas de intensidad que en total son siete [24].

$$\mathbf{M} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} X - iY & Z - iW \\ -Z - iW & X + iY \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 53}$$

Donde θ es la fase global del sistema de transmisión, en nuestro caso el SLM; y $\{X, Y, W, Z\}$ son coeficientes reales que dependen de la medición de las intensidades mencionadas [24].

Con la Matriz de Jones construida se puede predecir cuál es el estado de polarización del sistema de modulación más adecuado para optimizar la modulación de Amplitud y de Fase. Los resultados obtenidos para los coeficientes no estuvieron de acuerdo a los esperados. La teoría predice un comportamiento para I1 e I7 muy diferente al medido, por esta razón las curvas encontradas para los coeficientes no predijeron las curvas de Amplitud.

Las medidas para la construcción de la Matriz de Jones fueron tomadas utilizando el patrón de difracción producido por el Par de Young, midiendo la intensidad del máximo del primer orden de este patrón. Esto pudo haber sido el error aunque, también hay que considerar que el registro de Intensidades se realizó con la cámara CCD Pulnix TM6703 y no se conoce con toda certeza cuál es el tipo de integración que ella hace; así que, para tener mejores resultados con este método hay que medir la intensidad sobre todo el spot del haz y realizarla con un potenciómetro (Como se hizo en el Método Común del potenciómetro).

Método del Par de Young para Intensidad

Este método se basa en realizar el mismo procedimiento elaborado para la determinación de la curva de modulación de Fase, esta vez no se medirá el desplazamiento de los máximos de difracción sino que se medirá la intensidad del máximo central del patrón de difracción, mediante la cámara CCD.

Se proyectan el mismo NG sobre las dos aberturas y se procede a realizar las medidas. Las curvas encontradas no estaban de acuerdo a las medidas mediante el Método Común del potenciómetro, ni mucho menos con las curvas dichas por el fabricante [25]. Los errores en estas curvas se dan posiblemente debido al desconocimiento de la forma de integración (captación de imágenes) de la CCD y a que la medida de intensidad debe ser tomada sobre todo el tamaño del haz.

Estudio de la discretización en un SLM

Pensando en que la propagación de cualquier transmitancia de amplitud y/o fase discretizadas a un número NG de niveles de gris en un Modulador Espacial de Luz, puede generar diferentes resultados, se desarrollan pruebas computacionales para algunas transmitancias concretas:

- Mascara de fase Espiral multiplicada con la de una lente convergente
- Placa Zonal de Fresnel
- Mascara de Fase Espiral
- Placa zonal Hiperbólica
- Placa Zonal Toroidal
- Patrón de Speckle (Fase Aleatoria)

Los pasos para lograr las Discretización son los siguientes:

1. Se realiza un MAPEO desde los valores de Fase que se tengan $(0, 2\pi)$ a un intervalo normalizado $(0, 1)$.
2. El método usa un par de formas para redondear ciertos valores que se obtienen. Dicho redondeo se realiza con dos rutinas diferentes en Matlab, que consisten, claro está, en dos formas diferentes de aproximación. La primera se basa en la Rutina *Ceil* la cual toma cada número y lo lleva al entero mayor más cercano, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3.8 \\ 1.1 & -1.9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La segunda por su parte, se basa en la rutina *Round*, la cual realiza el redondeo “común” usado en las matemáticas.

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3.8 \\ 1.1 & -1.9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta el método del que se vaya a usar, nos disponemos a realizar el siguiente paso (Se explicara para cada método, aclarando de cual se trata en el inicio del párrafo).

- (*Ceil*) A la fase mapeada (obtenida en el paso 1) se multiplica por el nivel de gris NG , al que desea discretizar. Luego, se procede al redondeo en este caso utilizando la rutina *Ceil*, de Matlab. Luego se divide cada valor por el mismo nivel de gris que previamente multiplicamos NG (este truco matemático, es la esencia del método).
- (*Round*) A la fase mapeada (obtenida en el paso 1) se multiplica por el nivel de gris menos uno ($NG - 1$, debido a la naturaleza del redondeo). Luego, se procede al redondeo en este caso utilizando la rutina *Round*, de Matlab. Luego se divide cada valor por el mismo nivel de gris menos uno que previamente se multiplicó ($NG - 1$).

3. El último paso es realizar el mapeo inverso hecho en el paso 1, para volver a fase los valores obtenidos.

En la Figura 99 se muestra un esquema del procedimiento descrito usando la rutina de redondeo *Round*. Para la rutina *Ceil*, se procede de la misma manera pero teniendo en cuenta las variaciones que el uso de tal rutina exige. También se realiza el procedimiento descrito para dos tipos de intervalos de la fase $(0, 2\pi)$ y $(0, 3\pi/2)$. Esto se hace, para tener en cuenta la modulación que se puede desarrollar en un Modulador Espacial de Luz Holoeye 2002, en el cual solo se puede obtener valores de fase en $(0, 3\pi/2)$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 3.8 & 5.6 & 0.3 & 6.1 \\ 1 & \pi & 2.5 & 4.7 \\ 2.9 & 3.2 & 1.1 & 2.4 \\ 0.9 & 0 & 1.7 & 2\pi \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Mapeo}} \begin{bmatrix} 0.6048 & 0.8913 & 0.0318 & 0.9708 \\ 0.1592 & 0.5 & 0.3979 & 0.7480 \\ 0.4615 & 0.5093 & 1.1751 & 0.3740 \\ 0.1432 & 0 & 0.2706 & 1.0000 \end{bmatrix} \\
 \\
 \xrightarrow{\times(NG-1) = \times 3} 3 \begin{bmatrix} 1.8144 & 2.6738 & 0.0955 & 2.9125 \\ 0.4775 & 1.5 & 1.1937 & 2.2441 \\ 1.3846 & 1.52 & 0.5252 & 1.1220 \\ 0.4297 & 0 & 0.8117 & 3.0000 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Redondeo}} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div(NG-1) = \div 3} \begin{bmatrix} 0.6667 & 1.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.6667 & 0.3333 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0.6667 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 1.0000 \end{bmatrix} \\
 \\
 \xrightarrow[\text{Fase}]{\text{Volvemos a}} \begin{bmatrix} 4.1888 & 6.2832 & 0.0000 & 6.2832 \\ 0.0000 & 4.1888 & 2.0944 & 4.1888 \\ 2.0944 & 4.1888 & 2.0944 & 2.0944 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.0944 & 6.2832 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Figura 99. Esquema para la discretización para un $NG = 4$ usando la rutina *Round*.

En primer lugar, antes de mostrar los resultados, se mostraran algunas conclusiones de la discretización usada. En total son cuatro diferentes discretizaciones y se basan usando dos tipos de redondeo diferentes (*Round* y *Ceil*) y dos normalizaciones diferentes (2π y $3\pi/2$).

Para que tales discretizaciones sean claras se mostraran las realizadas para una Placa Zonal de Fresnel de 100 mm de distancia focal, Figura 100. La discretización se escribirá de la siguiente manera $[NG, Norm, Tipo]$ donde NG es el nivel de gris, $Norm$ es a que valor se ha normalizado y $Tipo$ es la opción de redondeo; por ejemplo $[3, 2\pi, C]$ significa que la discretización fue hecha para tres niveles de gris, normalizada a 2π y redondeada usando *Ceil*.

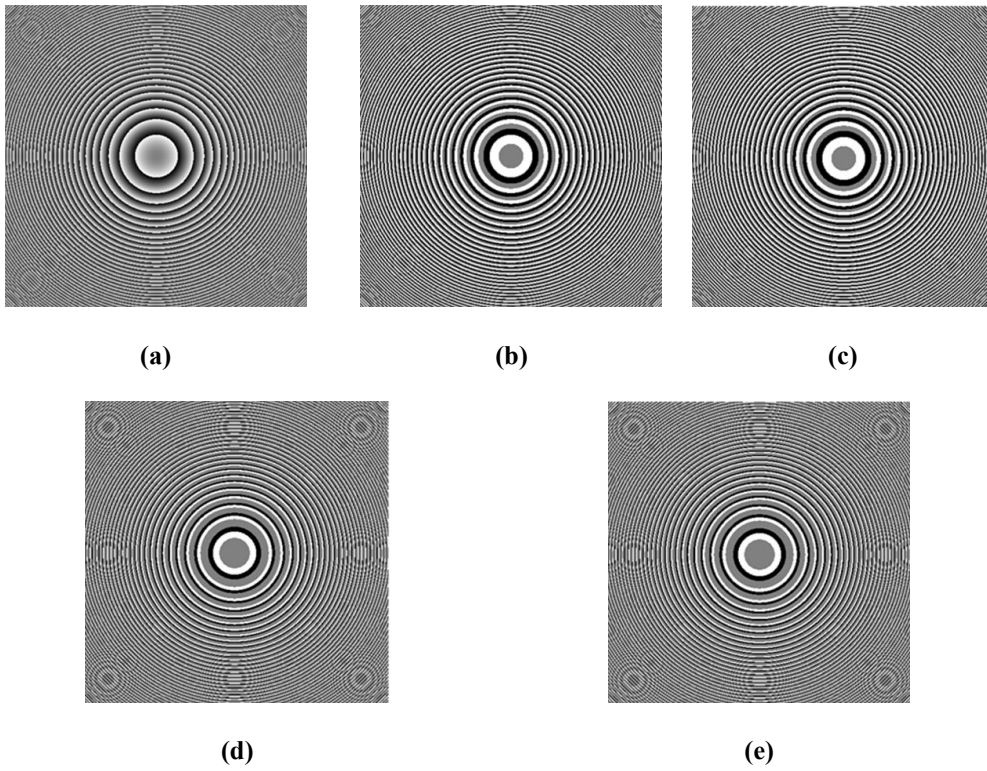


Figura 100. (a) Placa zonal de Fresnel con Foco=100mm. (b) PZF en $[3, 2\pi, C]$. (c) PZF en $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$. (d) PZF en $[3, 2\pi, R]$. (e) PZF en $[3, \frac{3\pi}{2}, R]$ (Recuerde que R Significa Round).

Note que las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ usando *Ceil* o *Round* son bastante similares (Lo mismo ocurre para la discretización a 4 Niveles). De hecho a simple vista se podría decir que son las mismas. Para analizar esto se realiza la resta de las imágenes esperando obtener una imagen homogénea (Un mismo nivel de gris) si las discretizaciones son iguales, Figura 101.

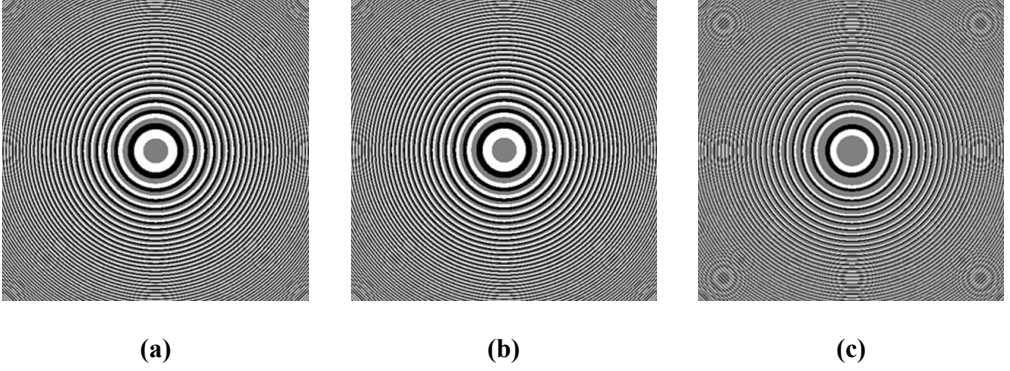


Figura 101. (a) PZF en $[3, 2\pi, C]$. (b) PZF en $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$. (c) Resta de las imágenes (a) y (b).

De la Figura 101, vemos que ambas fases si son diferentes, lo que era de esperarse debido a la diferencia en las normalizaciones. El mismo resultado se obtiene al discretizar usando *Round*. Sin embargo, para la propagación de ambas fases se encuentra algo bastante peculiar. Las fases de las propagaciones son iguales. Es decir, sin importar la normalización de la discretización la fase de la propagación va a ser la misma. Se propagaron las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ luego se obtuvo la intensidad y la fase del plano focal de ambas y se restaron, los resultados se muestran en la Figura 102

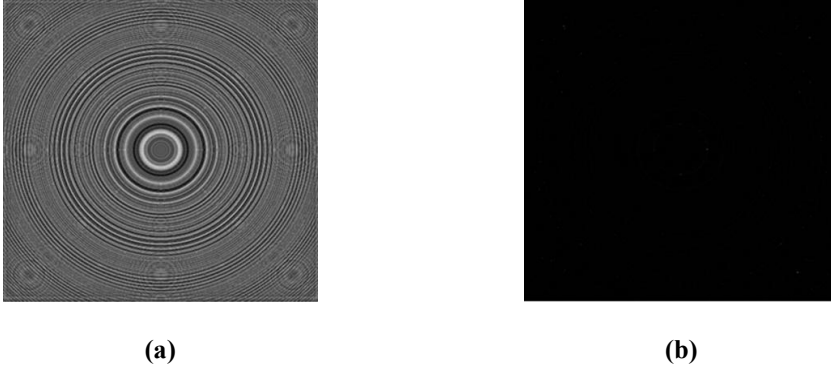


Figura 102. (a) Resta de las intensidades de los planos focales de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$. (b) Resta de las fases de los planos focales de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$.

Observando la Figura 102 vemos que las fases para ambas discretizaciones son las mismas ya que la diferencia en la imagen obtenida entre los pocos puntos blancos y en negro es de $\sim 10^{-14}$. De donde se concluye que las fases de la propagación son las mismas.

Estudiemos esta misma situación para un patron de Speckle (PS), Figura 103 y para una Placa Zonal Hiperbolica (PZH) Figura 104.

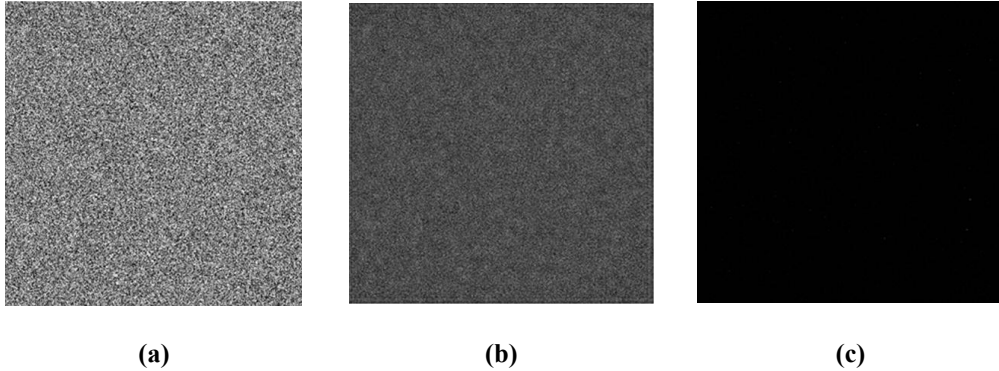


Figura 103. (a) Resta de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ para un PS. (b) Resta de las intensidades del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ para un PS. (c) Resta de las fases del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ para un PS.

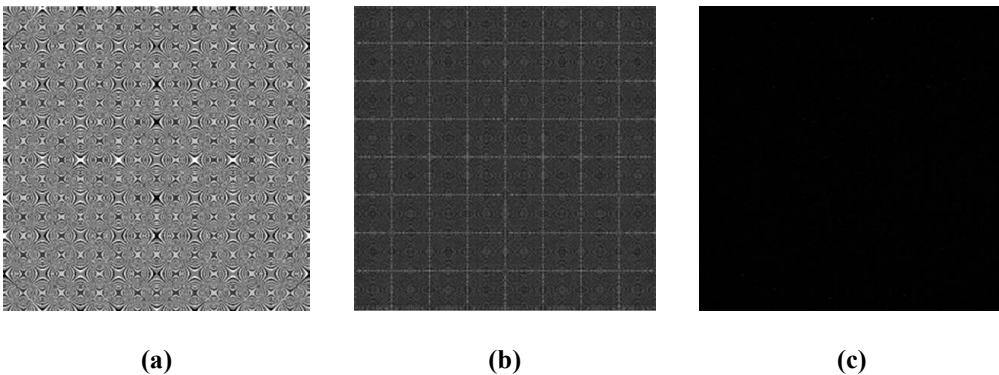


Figura 104. (a) Resta de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ para una PZH. (b) Resta de las intensidades del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ para una PZH. (c) Resta de las fases del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$ para una PZH.

Hasta aquí hemos encontrado que las fases son las mismas para las discretizaciones $[3, 2\pi, C]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$. Asi que se realizan pruebas para discretizaciones a cuatro niveles y usando *Round*.

Para el patrón de Speckle se tiene (Figura 105, Figura 106 y Figura 107)

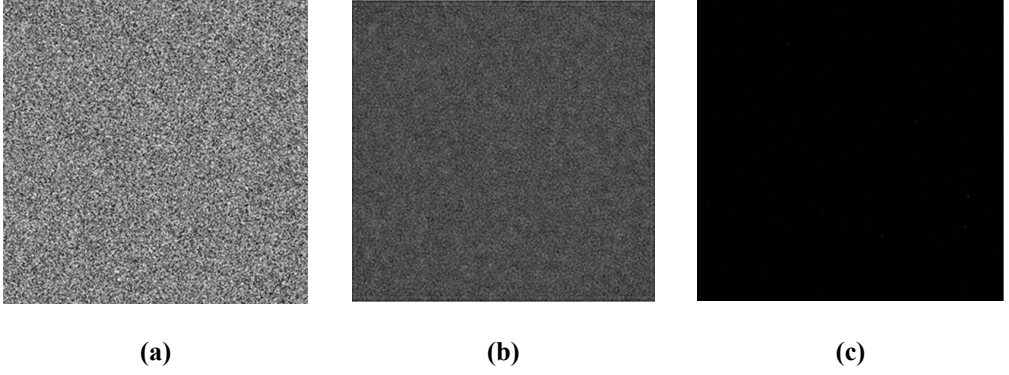


Figura 105. (a) Resta de las Restas de las discretizaciones $[3, 2\pi, R]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, R]$. (b) Resta de las intensidades del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, R]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, R]$. (c) Resta de las fases del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, R]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, R]$.

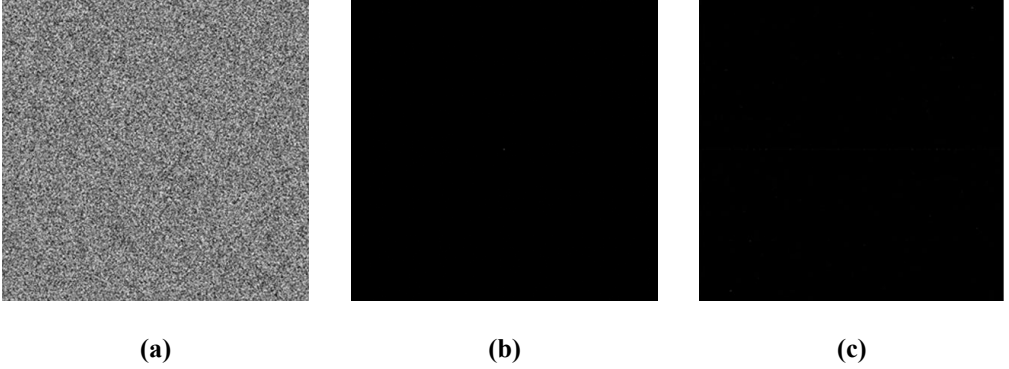


Figura 106. (a) Resta de las Restas de las discretizaciones $[4, 2\pi, C]$ y $[4, \frac{3\pi}{2}, C]$. (b) Resta de las intensidades del plano focal de las discretizaciones $[4, 2\pi, C]$ y $[4, \frac{3\pi}{2}, C]$. (c) Resta de las fases del plano focal de las discretizaciones $[4, 2\pi, C]$ y $[4, \frac{3\pi}{2}, C]$.

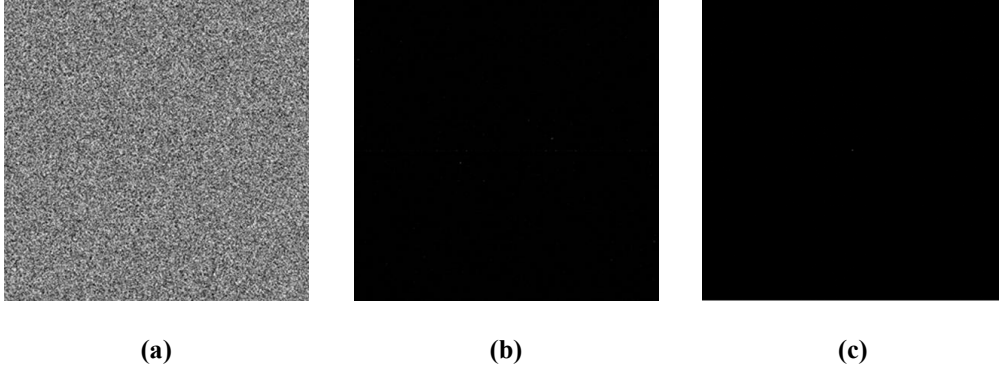


Figura 107. (a) Resta de las Resta de las discretizaciones $[4, 2\pi, R]$ y $[4, \frac{3\pi}{2}, R]$. (b) Resta de las intensidades del plano focal de las discretizaciones $[4, 2\pi, R]$ y $[4, \frac{3\pi}{2}, R]$. (c) Resta de las fases del plano focal de las discretizaciones $[4, 2\pi, R]$ y $[4, \frac{3\pi}{2}, R]$.

Para una Placa Zonal Hiperbólica tenemos que la situación se repite, la fase del plano focal es la misma para cada par de discretizaciones diferenciadas por la normalización únicamente, donde la diferencia máxima de punto a punto es de $\sim 10^{-14}$.

Si se hacen las mismas pruebas pero ahora para contrastar la fase obtenida para discretizaciones hechas con diferente método de redondeo, se obtiene lo siguiente para una Placa Zonal Hiperbólica:

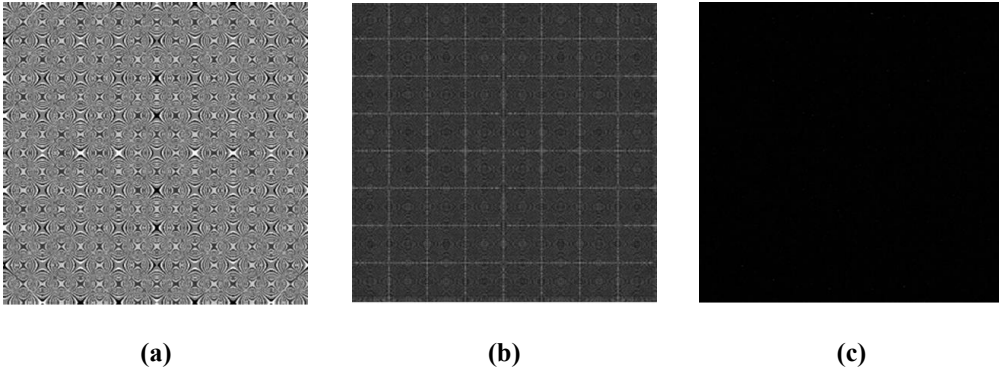


Figura 108. (a) Resta de las Resta de las discretizaciones $[3, 2\pi, R]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$. (b) Resta de las intensidades del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, R]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$. (c) Resta de las fases del plano focal de las discretizaciones $[3, 2\pi, R]$ y $[3, \frac{3\pi}{2}, C]$.

De los resultados obtenidos podemos decir que la fase del plano de Fourier es la misma para ambas discretizaciones y la intensidad del mismo varía debido a la normalización diferente.

Resultados para los planos de Fourier

Para la Máscara de Fase Espiral multiplicada con la fase de una lente convergente (MF+PZF), con distancia focal 100 mm. Para que la difracción sea buena a la transmitancia de fase se le adiciona una pupila Cabe aclarar que los resultados que se presentaran no son los mejores, puesto que esta es una primera explicación del tema.

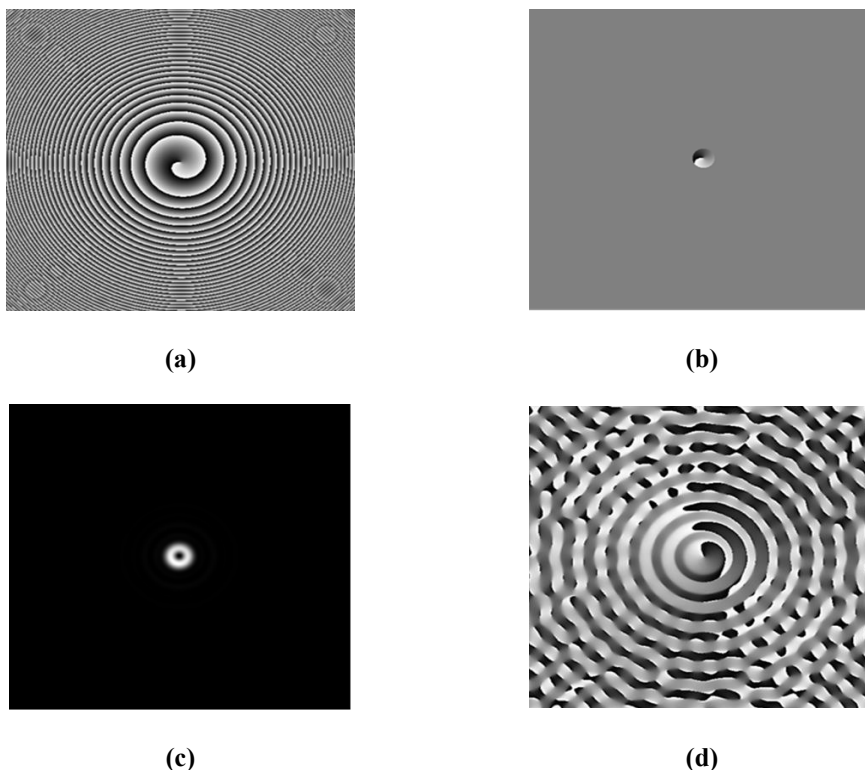


Figura 109. (a) Máscara de fase Espiral multiplicada por una Fase Esférica Convergente. (b) Fase de la imagen (a) multiplicada por una pupila. (c) Intensidad de la Transformada de Fourier de la imagen (b). (d) Fase de la transformada de Fourier de la imagen (b).

Las diferentes discretizaciones para la Máscara de fase Espiral multiplicada por una PZF, usando *Round* se muestran en la Figura 110.

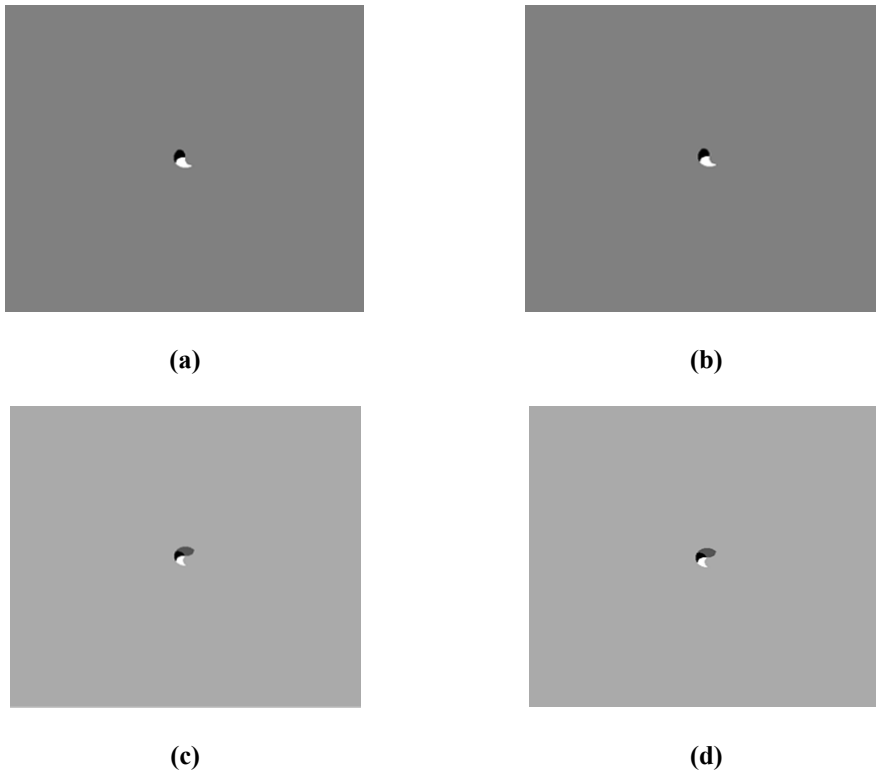


Figura 110. Discretizaciones de la Máscara de Fase espiral con la Fase Esférica Convergente a: (a) $[3, 2\pi, R]$. (b) $[3, 3\pi/2, R]$. (c) $[4, 2\pi, R]$. (d) $[4, 3\pi/2, R]$.

Para la discretización $[3, 2\pi, R]$ se obtiene lo siguiente en el patrón focal.

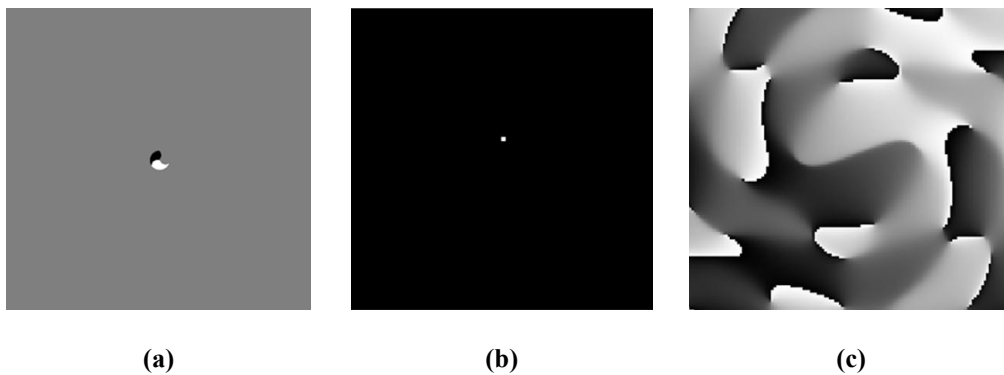


Figura 111 (a) Imagen discretizada de la. Mascara de fase Espiral multiplicada por una Fase Esférica. (b) Intensidad de la Transformada de Fourier de la imagen (a) (Aumentada). (c) Fase de la transformada de Fourier de la imagen (a) (Aumentada al 300%).

Los resultados para las demás discretizaciones de la MFyPZF son análogos, a diferentes Niveles de Gris a diferentes Normalizaciones y para los dos métodos de redondeo usados. La fase se “destruye” lo que hace que el vórtice (la singularidad sobre el eje de propagación) no aparezca al propagar la fase inicial.

Para una Placa Zonal de Fresnel (PZF) de distancia focal 300mm, se mostrarán solo las diferencias en las discretizaciones para cuatro niveles usando *Ceil* y *Round*, ya que los resultados obtenidos no son muy claros.

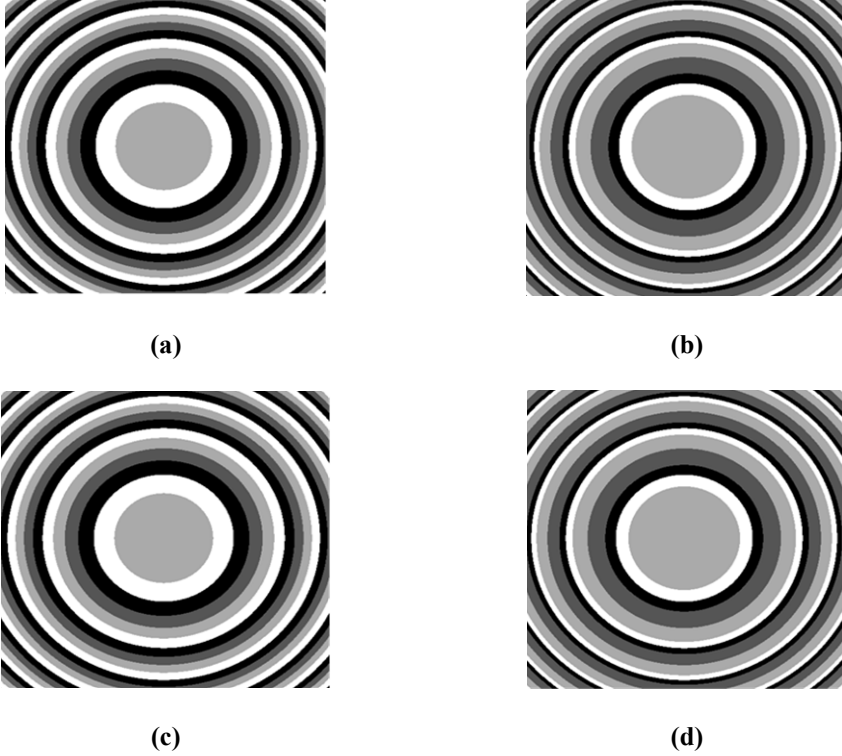


Figura 112. Discretizaciones de una PZF: (a) $[4, 2\pi, C]$. (b) $[4, 2\pi, R]$. (c) $[4, 3\pi/2, C]$. (d) $[4, 3\pi/2, R]$.

En la Figura 112 se evidencia que las fases a propagar son diferentes lo que hace nuestro descubrimiento anterior un poco más interesante (Sección 2).

Para una Máscara de Fase Espiral (MF) se obtienen resultados muy similares a los hallados para la MF+PZF. La fase se destruye, causando que el vórtice desaparezca.

Para una Placa Zonal Hiperbólica (PZH) de 300mm de foco los resultados se muestran en la Figura 113.

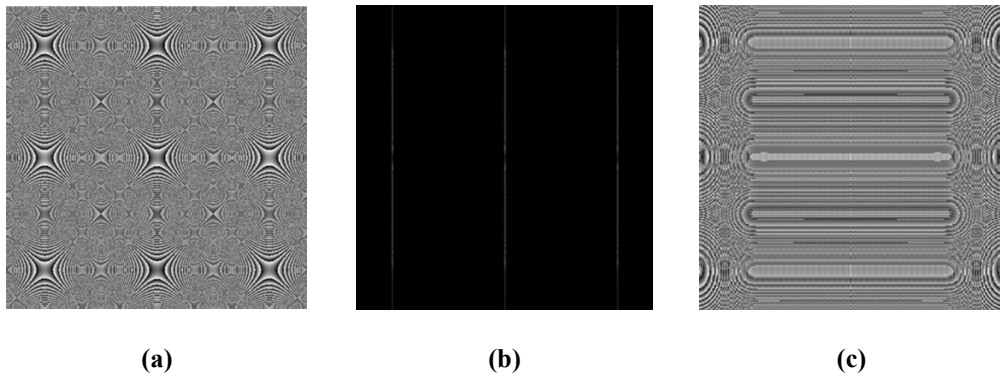


Figura 113. (a) PZH de 300 mm de foco. (b) Intensidad del plano focal de la PZF. (c) Fase del plano focal de la PZF.

Solo se mostraran los resultados para cuatro Niveles de Gris y para la normalización a 2π , puesto que, como hemos visto que la normalización sea a 2π o a $3\pi/2$, los resultados son los mismos a excepción de que el patrón de intensidad del patrón focal es un poco mas ‘intenso’ para la discretización normalizada a 2π .

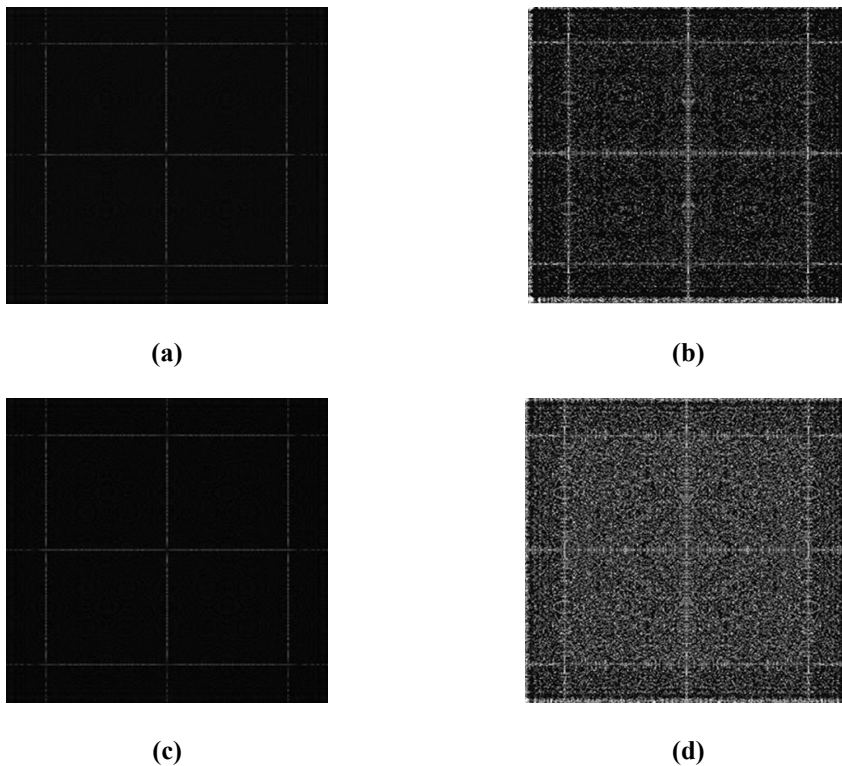


Figura 114. Para una PZH de foco 300mm (a) Intensidad del plano focal de $[4, 2\pi, C]$. (b) Fase del plano focal de $[4, 2\pi, C]$. (c) Intensidad del plano focal de $[4, 2\pi, R]$. (d) Fase del plano focal de $[4, 2\pi, R]$.

Para una Placa Zonal Toroidal de distancia focal 300mm, los resultados son los siguientes:

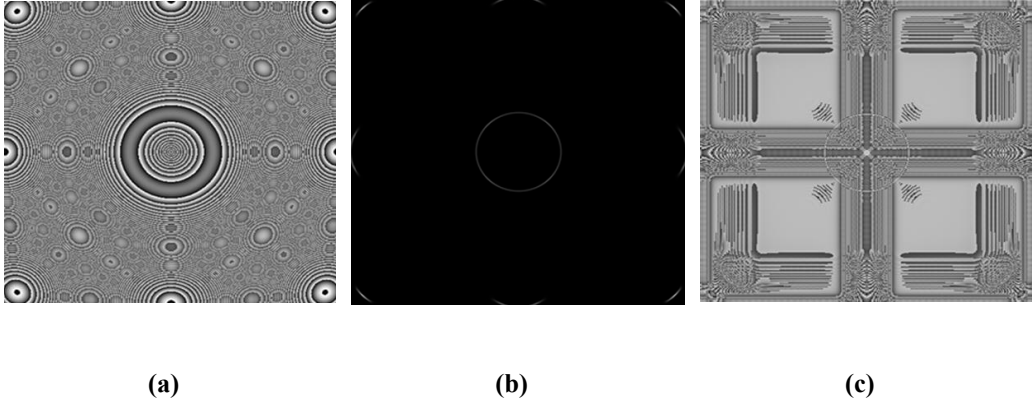


Figura 115. (a) PZT de 300 mm de foco. (b) Intensidad del plano focal de la PZT. (c) Fase del plano focal de la PZT.

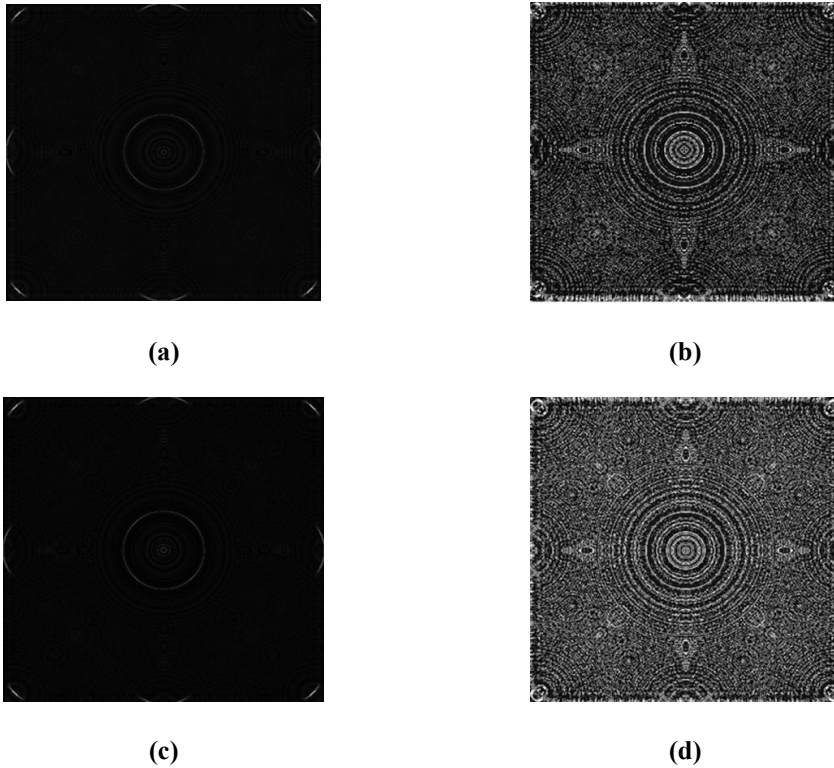


Figura 116. Para una PZH de foco 300mm (a) Intensidad del plano focal de $[4, 2\pi, C]$. (b) Fase del plano focal de $[4, 2\pi, C]$. (c) Intensidad del plano focal de $[4, 2\pi, R]$. (d) Fase del plano focal de $[4, 2\pi, R]$.

Observando la Figura 114 y la Figura 116 nos podemos dar cuenta que los patrones focales usando *Ceil* o *Round* presentan similitud en la intensidad mientras que en la fase son algo diferentes. Dispongámonos a hacer un estudio restando las intensidades y las fases de dos discretizaciones diferentes, como lo hicimos anteriormente. Para la PZT:



Figura 117. (a) Resta de las intensidades de los patrones focales de las discretizaciones $[4, 2\pi, C]$ y $[4, 2\pi, R]$. (b) Resta de las fases de los patrones focales de las discretizaciones $[4, 2\pi, C]$ y $[4, 2\pi, R]$.

Las diferencias mostradas en la Figura 117 son un poco más altas comparando con las mostradas anteriormente. Para la intensidad la diferencia entre los puntos negros y los blancos es de ~ 10 y para la fase es: ~ 6 . De esto podemos concluir que las discretizaciones hechas con *Round* y *Ceil*, para una misma normalización y mismos niveles de gris la intensidad y la fase si son diferentes.

Para un Patrón de Speckle (PS):

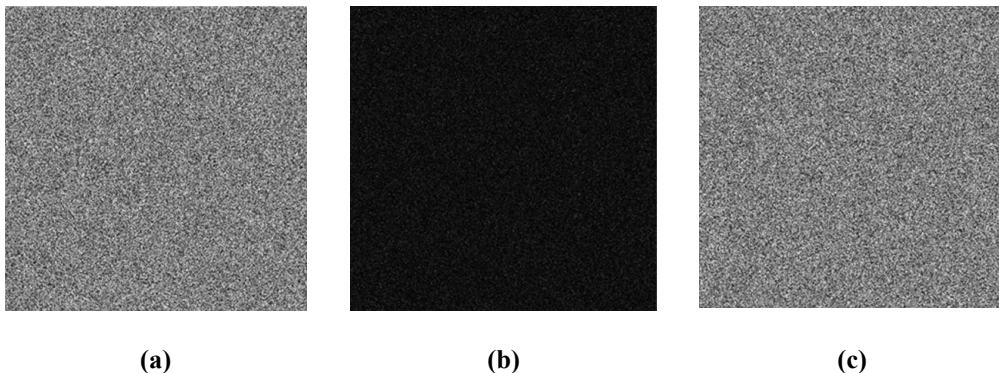


Figura 118. (a) Patrón de Speckle. (b) Intensidad del plano de Fourier del PS. (c) Fase del plano de Fourier del PS.

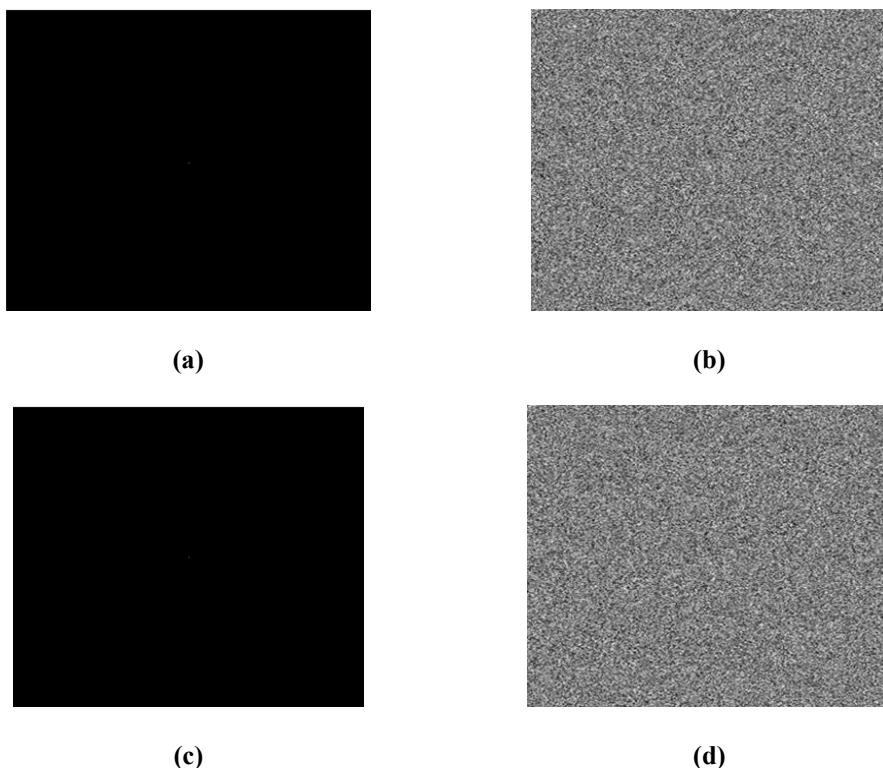


Figura 119. Para un Patrón de Speckle (a) Intensidad del plano focal de $[4, 2\pi, C]$. (b) Fase del plano focal de $[4, 2\pi, C]$. (c) Intensidad del plano focal de $[4, 2\pi, R]$. (d) Fase del plano focal de $[4, 2\pi, R]$.

Del estudio de las diferentes normalizaciones que se desarrollarían en un Modulador Espacial de Luz, concluimos que si la normalización se hace a 2π o $3\pi/2$, la fase del plano focal de la transmitancia propagada es la misma, solo hay una diferencia de $\sim 10^{-14}$. Mientras que para la intensidad la discretización normalizada 2π es un poco más intensa (como debe de esperarse debido a la normalización mayor). Además que las discretizaciones hechas para la misma normalización y para el mismo nivel de gris pero con diferente método de redondeo, presentan diferentes planos focales tanto en la fase como en la intensidad. Por otro lado, para las transmitancias que usan Mascaras de Fase Espiral, sus discretizaciones no dan buenos resultados. El patrón focal da un punto (sin embargo, creo que esto es problema de mi código). Además que las discretizaciones dan muy buenos resultados para los objetos ópticos difractivos (Placa Zonal Hiperbólica y Toroidal, para la Lente de Fresnel, no obtuve los patrones de intensidad focal queridos ‘puntos’, no obtenía nada era una imagen homogénea).

Eficiencia de Difracción de un SLM

Cuando se proyecta en el Modulador Espacial de Luz un objeto difractivo (Placa Zonal), se realiza con el fin de producir algún patrón de difracción de campo lejano o cercano; en general la luz difractada por un objeto de estos toma direcciones diferentes llamadas órdenes de difracción [16]. Se define entonces la Eficiencia de Difracción como la razón entre la luz (energía, potencia) que se encuentra en la figura focal con respecto a la que incide sobre el SLM (Figura 120).

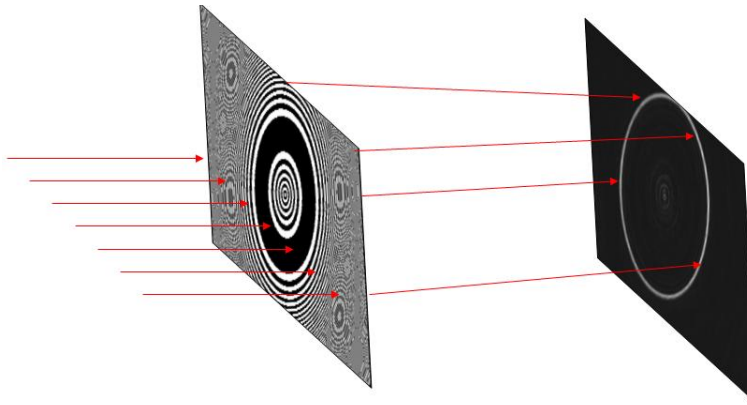


Figura 120. Esquema de la eficiencia de Difracción para una Placa Zonal Toroidal.

Se mide entonces la luz que llega al SLM con un potenciómetro Newport Power-Meter Model 1815-C y se divide por la cantidad de luz que se detecta en el patrón focal mediante una CCD (Figura 121).

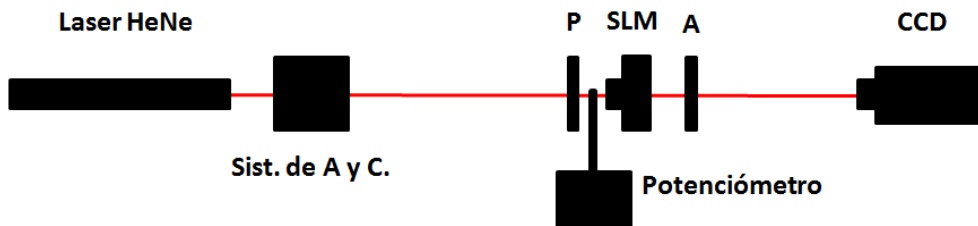


Figura 121. Montaje Experimental para determinar la Eficiencia de Difracción. Sist. de A y C: Sistema de Amplificación y Colimación; P: Polarizador; A: Analizador.

Usando una Placa Zonal Toroidal de distancia focal 30 cm se realizaron pruebas computacionales (Tabla 6) y experimentales (Tabla 7), discretizando la Placa a diferentes Niveles de Gris, considerando solo la codificación de fase del SLM [26].

Plaza Zonal	Eficiencia de Difracción
PZT - $NG = 4$	42.75%
PZT - $NG = 8$	65.99%
PZT - $NG = 16$	72.11%
PZT - $NG = 256$	74.07%

Tabla 6. Resultados computacionales de la Eficiencia de Difracción para una Placa Zonal Toroidal discretizada a diferentes niveles de Gris.

Placa Zonal	Potencia de Entrada	Potencia CCD	Porcentaje de Luz Inicial	Eficiencia de Difracción
PZT - $NG = 2$	$0.158 \mu W$	$0.0129 \mu W$	8.18%	1.89%
PZT - $NG = 4$	$0.158 \mu W$	$0.0131 \mu W$	8.32%	2.68%
PZT - $NG = 8$	$0.158 \mu W$	$0.0130 \mu W$	8.26%	2.79%
PZT - $NG = 16$	$0.158 \mu W$	$0.0129 \mu W$	8.20%	2.84%
PZT - $NG = 256$	$0.158 \mu W$	$0.0127 \mu W$	8.10%	2.78%

Tabla 7. Resultados experimentales de la Eficiencia de Difracción para una Placa Zonal Toroidal discretizada a diferentes niveles de Gris.

Es indudable que para obtener las eficiencias teóricamente, una serie de suposiciones se debieron tener en cuenta, no obstante para el caso experimental algunas de estas suposiciones no se cumplen o se cumplen solo parcialmente provocando la diferencia. Además, como mostramos en los resultados por el solo hecho de trabajar con el SLM la eficiencia decae enormemente debido a su comportamiento no lineal en la codificación en fase y amplitud (Figura 97 y Figura 98).

Bibliografía

7

- [1] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, «Orbital angular-momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes,» *Physics Review A*, vol. 45, nº 11, pp. 8185-8189, 1992.
- [2] A. Yao; M. Padgett, «Orbital Angular Momentum: Origins, Behavior and Applications,» *Advances in Optics and Photonics*, vol. 3, pp. 161-204, 2011.
- [3] M. Berry, J. Nye and F. Wright, «The elliptic umbilic diffraction catastrophe,» *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 291, pp. 453-484, 1979.
- [4] L. A. Lugiato, F. Prati, L. M. Narducci y G. L. Oppo, «Spontaneous breaking of the cylindrical symmetry in lasers,» *Opt. Commun.*, vol. 69, pp. 387-392, 1989.
- [5] V. Bazhenov, M.V.Vasnetsov y M. S. Soskin, «Laser beams with screw dislocations in their wave-fronts,» *JETP. Lett.*, vol. 52, pp. 429-431, 1990.
- [6] J. W. Simmons, M. J. Guttman, States, Waves and Photons: A modern introduction to light, Addison-Wesley, 1970.
- [7] L. Allen, M. Padgett, and M. Babiker, «The orbital angular momentum of light,» *Prog. Opt.*, vol. 39, p. 291–372, 1999.
- [8] Andrea Aiello, «Goos–Hañchen and Imbert–Fedorov shifts:,» *New Journal of Physics*, vol. 14, 2012.
- [9] A. E. Siegman, Lasers, Estados Unidos: University Science Books, 1986.
- [10] Max Born y Emil Wolf, Principles of Optics, Cambridge: Cambridge, University Press, 1999.
- [11] Liu Yi-Dong, Gao Chun-Qing y Gao Ming-We, «Study on holographic grating

- diffraction for Laguerre–Gaussian beam generation,» *Chin. Phys.*, vol. 17, n° 05, pp. 1769-1777, 1998.
- [12] Hans J. Weber y George B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists*, Amsterdam: Academic Press, 2003.
- [13] M. V. Berry, «Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps,» *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 6, pp. 259-268, 2004.
- [14] A. J. Jr. Bogush y R. E. Elkins, «Gaussian beam expansions for large aperture antennas,» *IEEE Trans. Propag.*, vol. 34, p. 228–243, 1986.
- [15] E. Rueda , J.A. Gómez, D. Muñetón, J.F. Barrera y A. Lencina, «Generación y Caracterización de Vórtices Ópticos,» de *XII Encuentro Nacional de Optica (XIIENO)*, Barranquilla - Colombia, 2011.
- [16] Eugene Hecht y Addison-Wesley, *Optics*, San Francisco: Pearson Education, Inc., 2002.
- [17] Jonathan Leach, Eric Yao y Miles J Padgett., «Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam,» *New Journal of Physics*, vol. 6, p. 71, 2004.
- [18] Stephen M. Barnett y Roberta Zambrini, «Chapter 12: Orbital Angular Momentum of Light,» Springer, 2006, pp. 277-311.
- [19] Vladimir G. Denisenko, Alexander Minovich, Anton S. Desyatnikov y Wieslaw Krolikowski, «Mapping phases of singular scalar light fields,» *OPTICS LETTERS*, vol. 33, n° 1, pp. 89-91, Enero 1, 2008.
- [20] Shashi Prabhakar, Ashok Kumar, J. Banerji, y R. P. Singh, «Revealing the order of a vortex through its intensity record,» *OPTICS LETTERS*, vol. 36, n° 22, pp. 4398-4400, Noviembre 15, 2011.
- [21] «Wikipedia - Mach-Zehnder Interferometer,» [En línea].
- [22] Luís E. E. de Araujo y Matthew E. Anderson, «Measuring vortex charge with a triangular aperture,» *Optics Letters*, vol. 36, March 2011.
- [23] D. Engström et al. , «Diffraction-based determination of the phase modulation for

- general spatial light modulators,» *Applied Optics*, vol. 45, n° 28, pp. 7195-7204, October 2006.
- [24] I. Moreno et al. Jones Matrix, «Method for predicting and optimizing the optical modulation properties of a liquid-crystal display,» *Journal of Applied Physics*, vol. 94, n° 6, pp. 3697-3702, September 2003.
- [25] *Phase and amplitude modulation properties of the LC 2002*. [Performance]. Holoeye, 2008.
- [26] D. Muñetón, E. Rueda, J.H Serna y R. Henao , «Estudio de la Codificación de Placas Zonales en un Modulador Espacial de Luz,» de *XI Encuentro Nacional de Optica*, Pamplona - Colombia, 2008.
- [27] F. S. Roux, «Optical vortex density limitation,» *Opt. Commun.*, vol. 223, pp. 31-38, 2003.